对一道等效重力问题的拓展

景文成
（长春师范大学物理学院　吉林 长春　130021）
（收稿日期：2016 - 11 - 07）

摘　要：从一道等效重力场的典型例题出发，通过延伸和拓展，挖掘其隐藏在问题背后的共性规律 —— 等效重力观点. 从而对解决复合场中同类问题起到一定的引导作用，提高解题效率.

关键词：等效重力　圆周运动　类平抛运动　类斜上抛运动

物体在多种场（重力场、匀强电场、磁场、浮力场等）中运动，将多种场的作用化多为一，用一个全新的“复合场”来研究物体的运动规律，可使研究的问题简洁灵动，这个复合场就是“等效重力场”. 利用等效重力场的思想方法来处理问题，是一类常见而又颇有难度的问题. 这类问题学生往往找不到突破口，受制于自身的思维而不得要领. 在教学中教师通过典型问题为载体，进行针对性的延伸讲解，学生是能够受益匪浅并豁然开朗.

【典型例题】

如图 1 所示，$MPQO'$ 区域为有界的、竖直向下的匀强电场（边界上有电场），电场强度为 $E=\dfrac{mg}{q}$，$\overset{\frown}{ACB}$ 为光滑固定的半圆形轨道，轨道半径为 R，A 和 B 为圆水平直径的两个端点，$\overset{\frown}{AC}$ 为 $\dfrac{1}{4}$ 圆弧. 一个质量为 m，电荷量为 $-q$ 的带电小球，从 A 点正上方高为 $H=R$ 处由静止释放，并从 A 点沿切线进入半圆轨道，不计空气阻力及一切能量损失，关于带电小球的受力及运动情况，下列说法正确的是（　　）

A. 小球到达 C 点时对轨道压力为 $2mg$

B. 小球在 $\overset{\frown}{AC}$ 部分运动时，加速度不变

C. 适当增大 E，小球到达 C 点的速度可能为零

D. 若 $E=\dfrac{2mg}{q}$，要使小球沿轨道运动到 C，则应将 H 至少调整为 $\dfrac{3}{2}R$

【答案】A，D.

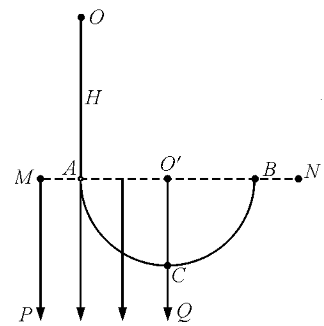

图 1　例图

从这道题来看，如果借助等效重力场的方法，来解答会显得很简洁清晰，也会有助于学生以后能够利用等效重力的观点来解决问题，下面对每个选项进行分析（为了便于研究，等效重力用 G' 表示）.

1　当 $qE=mg$ 时，对小球由 $A\rightarrow C\rightarrow B$ 过程的分析

从小球由 $A\rightarrow C$ 过程来看，由于电场力竖直向上，重力竖直向下，但是大小相等，所以等效重力为零，亦即等效重力不做功，弹力总指向圆心起到向心力的作用，可知由 $A\rightarrow C$ 为匀速圆周运动. 因此可对 $O\rightarrow C$ 全程由动能定理列方程

$$mgH=\frac{1}{2}mv_C^2-0$$

解得

$$v_C=\sqrt{2gH}$$

作者简介：景文成（1978 -　），男，在读硕士研究生，主要研究方向：课程与教学论（物理）.

通讯作者：李春杰（1963 -　），男，教授，主要研究方向：物理教育.

由于 $H=R$,则

$$v_C=\sqrt{2gR}$$

在 C 点由牛顿第二定律得

$$N=m\frac{v_C^2}{R}=2mg$$

由于小球在 $A\to C$ 过程中做匀速圆周运动,可知向心加速度 $a_n=\frac{v^2}{R}$ 大小不变但是方向时刻变化,所以加速度是变化的,因此选项 B 不正确.

拓展

继续研究小球从 $C\to B$ 的运动,此时等效重力 G'(等效重力为真正的重力)竖直向下,那么小球能上升多高?能否离开 B 点?

解析:

借助等效重力场的思想,由 $A\to C$ 等效重力不做功,只需比较 H 与 R 的关系即可.讨论如下.

(1)$H>R$ 时,小球从 B 点飞出做竖直上抛运动,如图 2 所示.

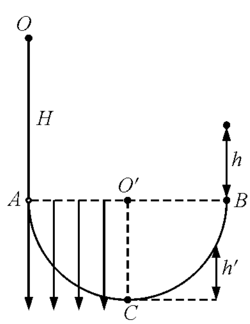

图 2　借助等效重力场思想,分析带电小球在电场中运动

由动能定理有

$$mgH-mg(R+h)=0$$

解得

$$h=H-R$$

式中 h 为距 B 点的高度.

(2)$H=R$ 时,小球恰好到达 B 点速度为零.

(3)$H<R$ 时,小球在 CB 之间某处速度为零,如图 2 上升的高度(距 C 点),由

$$mgH-mgh'=0$$

解得 $$h'=H$$

式中 h' 为距 C 点的高度.

2　适当增加 E,等效重力方向竖直向上情况的分析

本题 C 选项,适当增大 E,由 $A\to C$ 过程得出 $qE>mg$,两个力方向相反,等效重力 $G'=qE-mg$,方向竖直向上,如图 3 所示.

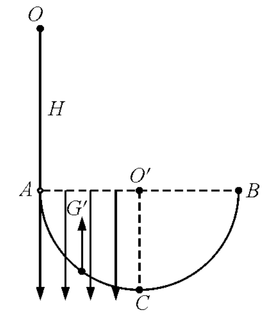

图 3　适当增加 E,带电小球的受力分析

此时 C 点相当于竖直平面内重力场中的最高点,显然要过最高点满足

$$G'=qE-mg\leqslant m\frac{v_C{}^2}{R}$$

可知,在 C 点速度要求

$$v_C\geqslant\sqrt{(qE-mg)R}$$

所以 C 选项不正确.

本题的 D 选项,可知等效重力

$$G'=qE-mg=mg$$

方向竖直向上,小球刚好到达 C 点,列式如下

$$G'=mg=m\frac{v^2}{R}$$

再由 $O\to C$ 全程动能定理得

$$mgH-G'R=\frac{1}{2}mv^2$$

联立可得

$$H=\frac{3}{2}R$$

拓展

适当增大 E(为某一确定值)此时等效重力 $G'=qE-mg$,小球恰好过 C 点,H 要满足什么条件?

解析:

进行受力分析如图 4 所示,计算如下

$$G'=qE-mg=m\frac{v^2}{R}$$

$$mgH-G'R=\frac{1}{2}mv^2$$

联立可得

$$H=\frac{3(qE-mg)R}{2mg}$$

讨论如下:

如果 $H \geqslant \dfrac{3(qE-mg)R}{2mg}$，小球能从 C 点离开.

如果 $H < \dfrac{3(qE-mg)R}{2mg}$，小球会从 AC 之间某点 F 离开轨道，并且做类斜上抛运动，如图 4 所示.

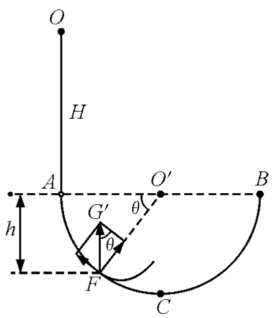

图 4　适当增大 E，小球恰好过 C 点

那么小球刚离开轨道 F 点时下降的高度(距 A 点)？计算如下.

设在 F 点刚好离开轨道，可知

等效重力为

$$G' = qE - mg$$

由 $O \to F$ 全程列动能定理可得

$$mgH - G'h = \frac{1}{2}mv^2$$

在 F 点刚要离开轨道，由等效重力 G' 沿半径方向分力提供向心力可得

$$G'\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

由几何关系得

$$\sin\theta = \frac{h}{R}$$

联立可得

$$h = \frac{2mgH}{3(qE-mg)}$$

式中 h 为 AF 间竖直高度.

3　适当减小 E，等效重力方向竖直向下情况的分析

适当减小 E(为某一确定值)，小球将怎样运动？减小 E，可得出 $qE < mg$，则等效重力 $G' = mg - qE$，方向竖直向下.

分析可知，小球由 $A \to C$ 一直加速运动，一定能过 C 点. 下面从高度 H 满足什么条件来延伸思考能否到达 B 点？

如果恰好到达 B 点的速度为零，此时可以看到 $A \to C \to B$ 相当于只有电场力做功，因此由 $O \to B$ 动能定理全程列式可得

$$mgH - qER = 0$$

由此可知

$$H = \frac{qER}{mg}$$

讨论如下：

(1) $H > \dfrac{qER}{mg}$ 时，小球能过 B 点继续上升，上升的高度(距 B 点)为 h_1，有

$$mg(H - h_1) - qER = 0$$

解得

$$h_1 = H - \frac{qER}{mg}$$

(2) $H < \dfrac{qER}{mg}$ 时，小球在 CB 之间某处速度为零，上升的高度(距 C 点)为 h_2，有

$$mgH + (mg - qE)R - mgh_2 = 0$$

解得

$$h_2 = \frac{mg(H+R) - qER}{mg}$$

4　各种场力与重力不在同一直线上的情况的分析

各种场力与重力不在同一直线上，物体可能做圆周运动、类平抛运动、类斜上抛运动等. 此时可以把两个力进行合成当作等效重力 G' 来处理.

4.1　利用等效重力解决圆周运动问题

如图 5 所示，一个摆线长为 l，质量为 m 的带正电摆球，悬挂在方向水平向左的匀强电场中. 小球由水平位置 A，从静止开始向下运动，且到达竖直位置时，速度恰好为零. 求小球运动过程中，摆线受到的最大拉力.

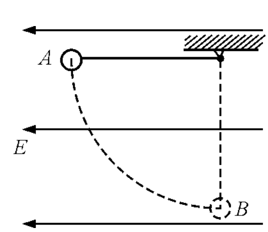

图 5　摆球为带正电的球体，单摆在电场中运动

小球从 A 运动到 B，动能增量为零. 因为摆线的

拉力不做功，电场力(qE)对小球做的负功必定等于重力(mg)对小球做的正功，即

$$qEl = mgl$$

即
$$qE = mg$$

可见，小球受到的电场力与小球的重力大小相等，如图 6 所示，小球到达 B 后，将在 A 与 B 之间来回振动.

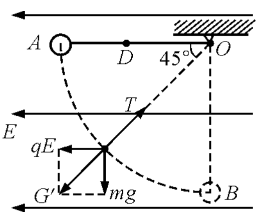

图 6　单摆在电场中运动的受力分析

根据振动的对称性，平衡位置位于 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点. 在平衡位置，电场力与重力的合力(等效重力 G')为 $G' = \sqrt{2}\,mg$，方向与水平方向成45°. 将电场与重力场的叠加场等效为一个重力场，等效重力加速度方向与水平方向成45°，大小为

$$g' = \frac{G'}{m} = \sqrt{2}\,g$$

小球通过平衡位置时，绳的拉力大. 根据类似机械能守恒，小球在平衡位置速度最大，且为

$$v_0 = \sqrt{2g'h} = \sqrt{2\sqrt{2}\,gl(1 - \cos 45^\circ)}$$

根据牛顿第二定律

$$T - \sqrt{2}\,mg = m\frac{v_0^2}{l}$$

所以，绳的最大拉力为

$$T = m\frac{v_0^2}{l} + \sqrt{2}\,mg = (3\sqrt{2} - 2)mg$$

4.2　利用等效重力解决类平抛运动问题

如图 7 所示，匀强磁场方向垂直纸面向外，磁感强度 $B = 1$ T，匀强电场方向水平向左，电场强度 $E = 10\sqrt{3}$ N/C. 一带正电的微粒质量 $m = 2\times10^{-6}$ kg，电荷量 $q = 2\times10^{-6}$ C，在此空间恰好做匀速直线运动，问：

(1) 带电微粒运动速度的大小和方向？

(2) 若微粒运动到 P 点的时刻，突然将磁场撤去，那么经多少时间微粒到达 Q 点？(设 PQ 连线与电场方向平行)

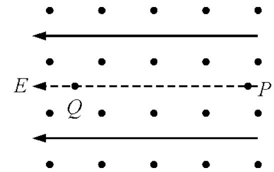

图 7　运动电荷在电场和磁场中运动

由于微粒做匀速直线运动，可知洛伦兹力与电场力和重力的合力(G')平衡，如图 8 所示，θ 为 G' 与水平方向的夹角，由于

$$\tan\theta = \frac{mg}{qE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以
$$\theta = 30^\circ$$

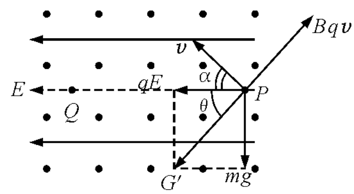

图 8　洛沦兹力与电场力和重力的合力平衡

由平衡条件得

$$Bqv = \frac{mg}{\sin\theta}$$

则微粒的速度大小为

$$v = \frac{mg}{Bq\sin\theta} = 20 \text{ m/s}$$

与水平方向的夹角为

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 60^\circ$$

磁场撤去后，微粒从 P 到 Q 做类似平抛运动，如图 9 所示，等效重力加速度为

$$g' = \frac{\dfrac{mg}{\sin\theta}}{m} = 2g$$

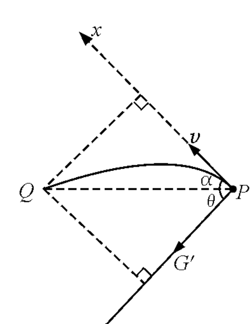

图 9　磁场撤去后微粒运动情况

在沿着 v 的方向有

$$x = vt$$

在垂直于 v 的方向有

$$y = \frac{1}{2}g't^2$$

又因为

$$\tan\theta = \frac{x}{y}$$

所以运动时间为

$$t = \frac{2v}{g'\tan\theta} = 2\sqrt{3}\ \text{s}$$

4.3　利用等效重力解决类斜上抛运动问题

如图 10 所示，一带正电的小金属块 A 以初速度 v_0 从光滑水平高台上飞出. 已知在高台边缘的右侧足够大空间中存在水平向左的匀强电场，小金属块 A 所受电场力大小为其重力的 2 倍. 则金属块运动过程的最小速度是多少？

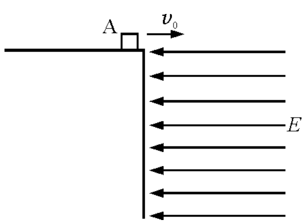

图 10　带正电小金属块从水平高台飞出

解法一：设经过 t 速度达到最小

在水平方向只受电场力作用做匀减速运动，加速度大小为

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{2mg}{m} = g$$

水平速度为

$$v_x = v_0 - at = v_0 - 2gt$$

在竖直方向做自由落体运动，竖直速度为

$$v_y = gt$$

则金属块的速度

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 - 2gt)^2 + (gt)^2} = \sqrt{5g^2t^2 - 4gv_0t + v_0^2}$$

当 $t = \frac{2v_0}{5g}$ 时，速度有最小值，代入解得

$$v_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}v_0$$

很明显借助函数求最值的方法很繁琐，不容易求解.

解法二：将金属块的电场力和重力合成为等效重力 G'，设 G' 与 qE 间夹角为 θ 再将初速度 v_0 分别沿着 G' 方向和垂直于 G' 方向分解(图 11)，则

$$v_{x0} = v_0\sin\theta$$

$$v_{y0} = v_0\cos\theta$$

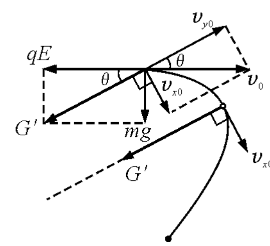

图 11　利用等效重力求解类斜上抛运动

分析可知，在 x 轴方向一直做匀速直线运动，在 y 轴方向做匀减速直线运动，当 $v_y = 0$ 时金属块在等效重力 G' 的最高点速度最小. 因此可得

$$v_{\min} = v_{x0} = v_0\sin\theta$$

而

$$\sin\theta = \frac{mg}{\sqrt{(qE)^2 + (mg)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

所以

$$v_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}v_0$$

解法二是利用等效重力的观点解题，计算简洁思路清晰.

5　小结

本文着重研究了在静电场与重力场中竖直方向上等效重力的问题，在教学中发现学生最不容易考虑竖直方向上的等效重力，所以本文进行了分析探讨. 在另外的一些问题中会出现其他场力与重力不在同一直线上的情形，此时可以把两个力进行合成当作等效重力来处理，再利用牛顿定律解题时就看成一个力进行合成求得加速度；在利用动能定理解题时，直接利用等效重力的做功列方程，更能事半功倍提高解题效率.

参考文献

1　王平杰. 高中物理思想方法提炼与拓展. 杭州：浙江大学出版社，2012. 45 ～ 47