

基于 Tracker 软件的马格努斯滑翔机运动分析

李超华 热买提江 岳仲谋 吴喜洋

(上海师范大学数理学院 上海 200234)

方伟

(上海师范大学数理学院 上海 200234;

上海市星系和宇宙学半解析研究重点实验室 上海 200234)

(收稿日期:2016-11-24)

摘要:利用 Tracker 视频分析软件对马格努斯滑翔机的轨迹进行描述,并通过逐帧分析确定滑翔机角速度随时间演化的关系式,进而通过建立理论模型推导出滑翔机的轨迹公式,使得不易直接测量的动态数据更加可操纵和量化;手机、数码设备的普遍化使得学生能够随时随地拍视频,Tracker 软件给学生的物理实验研究带来了便利.

关键词:马格努斯效应 Tracker 角速度

1 引言

1.1 马格努斯效应研究现状

当流体在横向流过一个绕着自己的轴转动的圆柱体时,类似于绕翼型的环量也要产生(由于粘性的作用),并且在这种情形下产生一个横向力(图1),它的量值在流动的垂直方向的每单位长度圆柱上是 $\rho\tau v$ (ρ 代表滑翔机运动时的空气密度, τ 代表滑翔机周围流体产生的环量, v 代表滑翔机质心运动的速度). 这种力的方向总是从来流与环量流动的方向是相反的那一边指向是相同的另一边. 这个现象就以其发现者马格努斯(1852年)为名,称为马格努斯效应^[1].

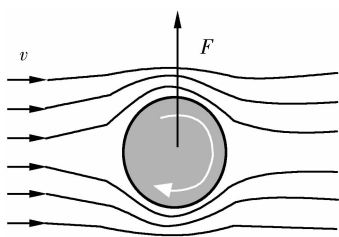


图1 马格努斯效应示意图

近些年来,不断有研究者围绕马格努斯效应的力学模型以及各方面的应用进行研究. 大部分是从伯努利原理出发研究马格努斯效应的受力机制或是直接对物体进行受力分析研究其运动的轨迹^[2~6]. 由于条件限制均没有考虑空气阻力下角速度的变化. 本文的创新之处在于建立理论模型时不仅考虑

到空气阻力对马格努斯滑翔机质心运动的影响,也考虑了空气阻力对滑翔机转速的衰减作用. 除了理论模型与实际更接近之外,本文中我们引入了可进行视频分析的 Tracker 软件. 基于实验的前提,我们利用 Tracker 软件对实验现象进行了分析,试图从理论和实验两方面对马格努斯滑翔机的运动进行详尽讨论.

1.2 Tracker 软件研究背景

Tracker 软件是由国外设计的应用于物理实验教学的一个免费视频分析软件,其主要功能是对视频中物体的运动进行动态分析,特别是为物理实验中质点的运动模型,如自由落体运动、抛体运动、单摆等的研究提供了极大的便利.

国内已经有一些学者利用 Tracker 软件来研究物理问题,如文献[7]利用 Tracker 测量液体粘度来减少实验中的误差;文献[8]用它来分析气垫导轨上弹簧振子的阻尼运动,利用软件自带的功能拟合出振动曲线方程和包络线方程,从而计算出气垫导轨的阻尼常数;文献[9]以抛体运动和简谐运动为例分析了 Tracker 软件在物理教学中功能——帮助学生探寻规律、辅助实验观察与教学以及研究性学习的有力工具;文献[10]则更为详细地解释了 Tracker 软件的特点、使用方法和教学中的应用,为更多有兴趣使用 Tracker 的人提供了便利. 本文要研究的马格努斯滑翔机的运动之前没有人利用 Tracker 软件研究过.

作者简介:李超华(1989-),女,在读硕士研究生,研究方向为学科教学(物理).

通讯作者:方伟(1981-),男,副教授,硕士生导师,主要从事天体物理、宇宙学及物理教学与课程论方面的研究.

2 用 tracker 软件分析马格努斯滑翔机的运动

2.1 马格努斯滑翔机的制作及拍摄

马格努斯滑翔机的做法是把两个一次性杯子杯底对杯底粘在一起,本实验用的杯子是白色的纸杯,为了方便后面观察分析滑翔机的角速度,特意把一个杯子的一面涂成了红色,如图 2 所示.拿一根有弹性的皮筋绕在滑翔机的中心,留下橡皮筋的一端用手拉住,另一只手握住马格努斯滑翔机.水平拉长橡皮筋后释放滑翔机,滑翔机便会旋转着飞出去,其运动轨迹是先上升到一定高度再斜向下落.



图 2 马格努斯滑翔机

拍摄滑翔机的运动视频时,要注意从两个角度同时拍摄.一是释放前开始从侧面拍摄滑翔机的运动轨迹;二是从释放前开始正面拍摄滑翔机的运动,前者用来描绘运动轨迹,后者用来测定角速度的衰变.

2.2 Tracker 软件对马格努斯滑翔机的分析过程

2.2.1 对滑翔机的侧面运动分析

把侧面拍摄的滑翔机运动视频导入 Tracker 软件,把视频中的黑板的长度定为已知尺寸,经测量黑

板长度为 3 m,在工具栏选取创建—Calibration Tools—定标尺,把定标尺起始点与黑板下底边两端点对齐,单击定标尺上的数字删除并输入数字 3,到此比例标度得以确定.

第二步建立直角坐标系,以滑翔机开始运动的位置为原点建立直角坐标系,根据视频拍摄角度微调坐标系,使坐标系横轴与视频中黑板的长边平行.接下来拉动视频播放进度条观察滑翔机开始飞行的时间点,并把它设置为起始帧,视频结束时的一帧设置为结束帧.创建质点模型,以滑翔机的中心为质点对象对滑翔机进行逐帧标记,质点轨迹的形状和颜色都可以自由选择.

把每一帧都标记后,滑翔机运动的轨迹便可以清晰地显示出来,如图 3 所示,同时在软件界面右下角会显示滑翔机每帧定格时对应的时间 t ,坐标 x 和坐标 y 的数据表格.利用软件中的速度矢量功能,点击显示速度矢量,可以看到软件计算出的每一点的速度大小(图 4),本次实验中滑翔机的初速度大小 $v_1 = 5.713 \text{ m/s}$.

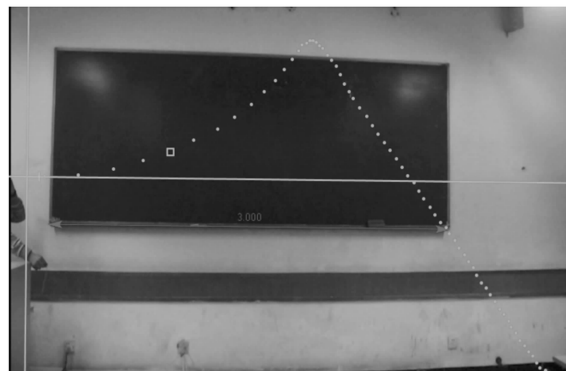


图 3 Tracker 软件标记的运动轨迹

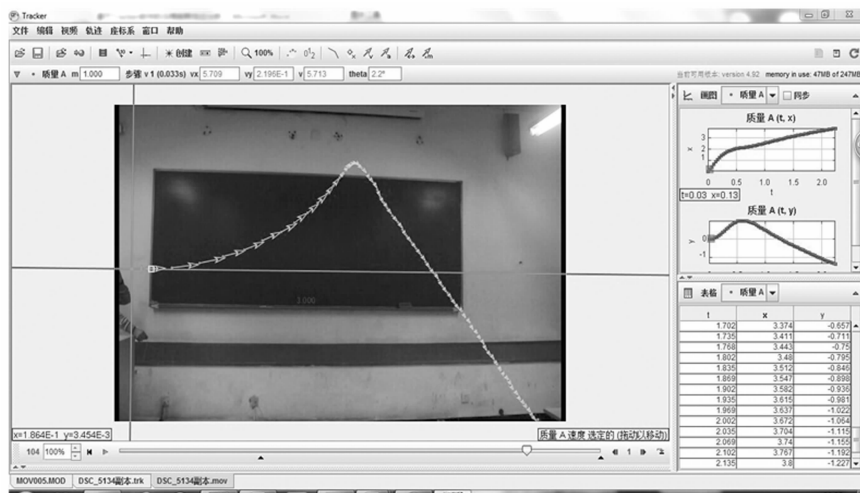


图 4 Tracker 软件分析结果一览表

2.2.2 对滑翔机的正面运动分析

把正面拍摄滑翔机运动的视频导入 Tracker 软件中,选取滑翔机开始运动的起始点(在开始运动的几帧中选取容易观察辨别的位置),对滑翔机的运动进行逐帧分析,记下滑翔机每转一圈的帧数.本实验中以 78 帧为起点,120 帧为终点,帧率为 29.97 /s,帧间间隔为 0.033 s,这一过程中滑翔机的转动周期发生了两次变化,以 78 帧时为零时刻计算.

具体分析如表 1 所示.

表 1 滑翔机转动周期与转速

相同周期	位置(帧)	$t_{\text{中间}}/s$	周期帧数	T/s	角速度 $\omega/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$
1	78 ~ 90	0.198	3	0.099	63.47
2	90 ~ 110	0.726	4	0.132	47.60
3	110 ~ 120	1.221	5	0.165	38.08

利用 Excel 表格对 $t_{\text{中间}}$ 和角速度进行处理,以 x 轴为时间 t , y 轴为角速度 ω 建立坐标系并描点(图 5),分别添加线性趋势线和指数趋势线,对比可以发现角速度随时间的变化关系更接近于指数关系,并且指数函数为 $\omega = 69.532e^{-0.5t}$.

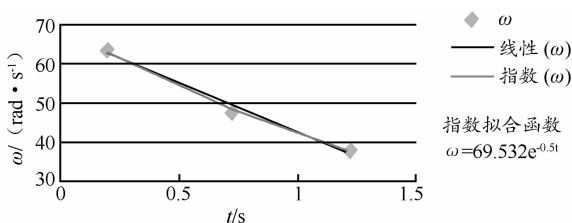


图 5 角速度与时间的函数关系

3 根据原理推导马格努斯滑翔机的运动轨迹公式

马格努斯滑翔机基于两个原理:一是马格努斯效应(前面已指出);二是伯努利原理,也就是流体的机械能守恒,动能 + 重力势能 + 压力势能 = 常数.我们可以把马格努斯滑翔机看作是一个圆柱体,则此圆柱体绕自身轴线旋转并且有流体在垂直于该轴线方向流过时,受到一个垂直于流动方向的横向力^[4].这个力叫做马格努斯力,也称为升力.

给滑翔机一水平速度并使其逆时针旋转,则在滑翔机周围流体中将会产生环量 $\Gamma = \oint_c \mathbf{v}_{\text{流}} \cdot d\mathbf{l}$,若滑翔机质心的速度为 v ,周围的空气密度为 ρ ,空气速度为零,由运动的相对性,滑翔机单位长度上的升力大小 $F_M = \rho v \Gamma$,则长度为 h 的滑翔机受到升力的

大小 $F_M = \rho h v \Gamma$,赋予上式中升力方向,因其与滑翔机质心速度 v 和转动角速度 ω 均垂直,判断滑翔机所受升力的方向为角速度 ω 与质心速度 v 叉乘的方向,表示为

$$\mathbf{F}_M = \rho h \Gamma \mathbf{k} \times \mathbf{v} = \rho h \Gamma \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right) \times \mathbf{v}$$

其中 \mathbf{k} 表示角速度的方向^[2].

对滑翔机侧面图建模,看作一个圆面,对其进行受力分析,如图 6 所示,考虑空气粘滞阻力 F_d 的作用,速度大小为 v ,方向与 x 轴正方向成 θ 角时,滑翔机受到重力、升力和空气粘滞阻力的作用.

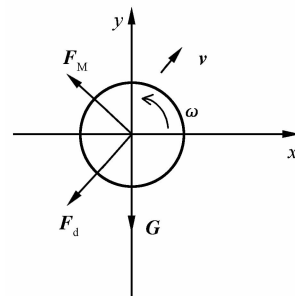


图 6 滑翔机受力分析

建立动力学方程式 $\mathbf{F}_M + \mathbf{F}_d + \mathbf{G} = m\mathbf{a}$,则有

$$\begin{cases} F_{My} - G - F_{dy} = ma_y = \frac{mdv_y}{dt} = \frac{md^2y}{dt^2} \\ -F_{Mx} - F_{dx} = ma_x = \frac{mdv_x}{dt} = \frac{md^2x}{dt^2} \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$F_M = \rho h v \Gamma = \rho h v \oint \mathbf{v}_{\text{流}} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r^2 h \rho v \omega \quad (2)$$

式中 h 表示滑翔机的线度.

滑翔机在空气中受到的粘滞阻力与无量纲雷诺系数相关,当雷诺系数 Re 小于 1 时,空气粘滞阻力可以用斯托克斯公式

$$f = 6\pi\eta r v$$

表示,当雷诺系数 $Re \approx 10^3 \sim 10^5$ 时,空气粘滞阻力可以用公式

$$f = C_d \frac{\rho v^2 S}{2} = 0.2 \rho v^2 S$$

表示,其中 C_d 是曳引系数, ρ 为空气密度, v 为滑翔机质心速度, S 为滑翔机迎风面面积,雷诺系数^[11,12]

$$Re = \frac{\rho d v}{\eta}$$

查询资料可知,室温条件下,空气密度约为 $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$,空气的粘性系数 $\eta = 1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, d 为滑翔机的直径,经测量计算为 0.03175 m,滑

翔机在空气中飞行的速度在 5 ~ 8 m/s, 所以雷诺系数

$$Re = \frac{\rho d v}{\eta} \approx 1.287 \times 10^4 \sim 1.717 \times 10^4$$

在 $10^3 \sim 10^5$ 范围内, 因此滑翔机受到的空气阻力为

$$F_d = -\frac{1}{2} C_d \rho v^2 S v = -0.2 \rho v^2 S v \quad (3)$$

负号表示与速度方向相反.

把式(2)、(3)代入式(1)中的两式得

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{2\pi r^2 h \rho \omega}{m} \dot{x} - \frac{0.2 S \rho v}{m} \dot{y} - g \\ \ddot{x} = \frac{2\pi r^2 h \rho \omega}{m} \dot{y} - \frac{0.2 S \rho v}{m} \dot{x} \end{cases} \quad (4)$$

令

$$B = \frac{2\pi r^2 h \rho}{m} \quad \gamma = \frac{0.2 S \rho}{m}$$

又

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

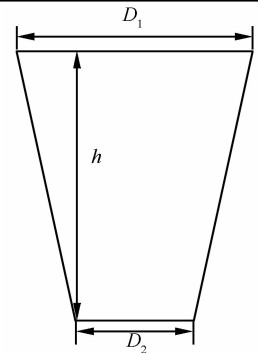
则式(4)变为

$$\begin{cases} \ddot{y} = B \omega \dot{x} - \gamma \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} - g \\ \ddot{x} = -B \omega \dot{y} - \gamma \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} \end{cases} \quad (5)$$

4 确定参数求出轨迹方程

测量一次性杯子的上下底半径、高度和质量分别如表 2 所示.

表 2 滑翔机自身参数测量数据

一次性杯子的参数		
D_1/mm	75	
h/mm	85	
D_2/mm	52	
m/g	10	

马格努斯滑翔机是由两个杯子对底粘在一起, 所以其长度

$$l = 2h = 0.17 \text{ m}$$

半径

$$r = \frac{D_1 + D_2}{2 \times 2} = 0.03175 \text{ m}$$

滑翔机质量

$$M = 2m = 0.02 \text{ kg}$$

面积

$$A = l \frac{D_1 + D_2}{2} \approx 0.01 \text{ m}^2$$

拍摄视频时的温度约为 14 °C, 所以空气密度约为 1.23 kg/m³. 将以上参数代入滑翔机的运动轨迹方程中, 求出 B 和 γ 的数值, 即

$$B = \frac{2\pi r^2 h \rho}{m} =$$

$$\frac{2 \times 3.14 \times 0.03175^2 \times 0.17 \times 1.23}{0.02} = 0.0662$$

$$\gamma = \frac{0.2 S \rho}{m} = \frac{0.2 A \rho}{m} =$$

$$\frac{0.2 \times 0.01 \times 1.23}{0.02} = 0.123$$

又 $\omega = 69.532e^{-0.5t}$, 所以轨迹方程为

$$\begin{cases} \ddot{y} = 4.603e^{-0.5t} \dot{x} - 0.123 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} - g \\ \ddot{x} = -4.603e^{-0.5t} \dot{y} - 0.123 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} \end{cases} \quad (6)$$

5 用 Maple 软件验证求出的轨迹方程

将求出的轨迹方程(6)输入到 Maple 软件中, 反求此方程组的轨迹图像, 结果如图 7 所示.

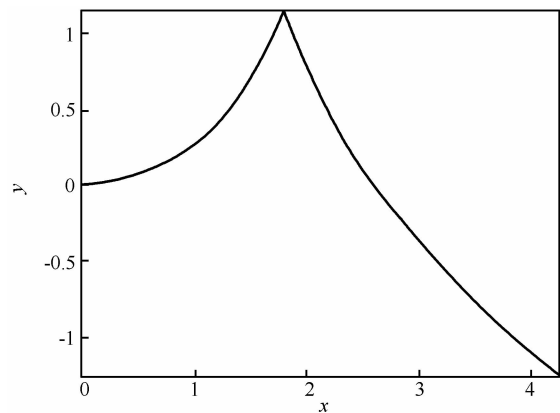


图 7 用 Maple 软件描绘的轨迹图像

从图像 7 中可以看出用所求轨迹方程(6)描绘的图像与实际轨迹图像(图 8)已经非常贴近, 证实了用 Tracker 软件得出的角速度和考虑空气阻力下推导出来的马格努斯滑翔机运动轨迹具有高度的合理性. 但是由于测量误差以及拍摄视频所用摄像机的像素不够高等原因仍存在偏差, 若使用高频摄像机和更加精细的测量工具, 相信能得到更加符合实际的轨迹图像.

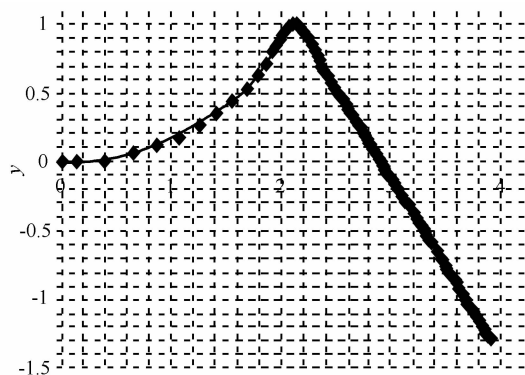


图8 Tracker软件描绘的实际轨迹图像

6 结束语

本文通过实验的方法来研究马格努斯滑翔机的运动,主要工作在于利用视频分析软件 Tracker,对实验同时拍摄的两种视频进行逐帧分析,找出角速度随时间衰变的关系式和马格努斯滑翔机的实际运动轨迹;考虑了滑翔机运动时所受到的阻力,并确定阻力的适用方程;通过建立力学模型推导出滑翔机的运动轨迹方程;最后利用数学软件 Maple 画出所求轨迹方程的曲线,来验证理论分析的正确性。经验证,本文中用理论推导出来的马格努斯滑翔机轨迹方程所描绘的运动路径与实际路径非常接近吻合。本研究的实际意义在于利用 Tracker 软件作为联系理论与实验两方面的桥梁,锻炼中学生和大学生在理论建模、实验设计与操作、数据处理与分析等全方位的能力。这样的思路可以用来设计开放式、创新性实验,在培养学生的物理核心素养、锻炼学生能力方

面起到积极的作用。同时,我们的工作为马格努斯效应的研究提供了一种更为高效便利的研究方法,并且考虑了空气阻力对马格努斯滑翔机平动和转动两方面的影响,使得理论的建模与实际情况更为接近,具有一定的参考意义。

参考文献

- 1 李世珊. 流体的力学. 上海:上海教育出版社,1982. 117 ~ 118
- 2 于凤军. 马格努斯效应与空竹的下落运动. 大学物理, 2012(9):19 ~ 21
- 3 潘慧矩. 马格努斯效应的力学模型. 浙江体育科学, 1995(3):17 ~ 19
- 4 吴海娜, 苏卓, 骆凯, 等. 马格努斯滑翔机运动的探索与研究. 大学物理实验, 2015(5):4 ~ 6
- 5 冀炜, 王景文, 王晨. 马格努斯滑翔机运动在不同旋转方向下的运动成因. 科技风, 2016(4):13 ~ 14
- 6 郝成红, 黄耀清, 王欢, 等. 考虑空气阻力时空竹的斜抛运动. 大学物理, 2016(3):15 ~ 16
- 7 庞玮, 陈峻, 李志伟, 等. 利用 Tracker 视频分析软件测量液体粘度. 大学物理, 2012(4):25 ~ 27
- 8 王经淘, 程敏熙, 贾昱, 等. 利用 Tracker 软件分析气垫导轨上弹簧振子的阻尼振动. 大学物理, 2014(4):23 ~ 24
- 9 吴志山. 让真实定量、定格 —— Tracker 软件在物理教学中的应用. 物理教师, 2012(7):53 ~ 54
- 10 徐忠岳, 余杰, 曾裕. Tracker 软件在物理实验教学中的应用. 中国教育信息化, 2014(12):75 ~ 77
- 11 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程力学. 北京:北京高等教育出版社, 2004. 236 ~ 239
- 12 赵林明, 宋辉武. 不可小觑的空气阻力. 物理教师, 2013, 34(10):83 ~ 84

Analysis on the Motion of Magnus Glider Based on Tracker Soft

Li Chaohua Re Maitijiang Yue Zhongmou Wu Xiyang

(Mathematical and Physical College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234)

Fang Wei

(Mathematical and Physical College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234;

Shanghai Key Lab for Astrophysics, Shanghai 200234)

Abstract: This manuscript describes Magnus glider trajectory by using Tracker (a video analysis software), and finds out the relation of the glider angular velocity evolving with time through the frame by frame analysis, then deduces glider trajectory formula through the establishment of theoretical model, which makes the dynamic data that is difficult to measure directly be manipulated and quantitative; Mobile digital devices of generalization enables the students to shoot video at what time and under what circumstances, Accordingly, Tracker brings facilitation students to do physical experiment research.

Key words: Magnus effect; Tracker; angular velocity