竞 赛 与
物理专题研修

一道全国物理竞赛试题的简解及其引起的思考

蔡　阳　　黄绍书

（六盘水市第 23 中学　贵州 六盘水　553001）

（收稿日期：2016－12－08）

摘　要：根据角动量守恒定律，对一道全国物理竞赛试题给出巧妙而简捷的解答，并对由此引起的一些相关问题予以讨论.

关键词：角动量守恒定律　物理竞赛　巧解　讨论

1　问题的提出

第八届全国中学生物理竞赛已经过去 25 年，然其预赛第一试试题第 5 题，如今想起依然历久弥新. 赛场监考看到的情景，仅有少数参赛选手能零散地列出个别方程组，多数甚至无从下笔. 本次竞赛后一周，中央电视台一套节目特邀有关专家针对该题作专题剖析，可见其难度之大.

【题目】如图 1 所示，一水平放置的圆环形刚性窄槽固定在桌面上，槽内嵌着 3 个大小相同的刚性小球，它们的质量分别是 m_1，m_2 和 m_3，且 $m_2=m_3=2m_1$. 小球与槽的两壁刚好接触而它们之间的摩擦可忽略不计. 开始时，3 球处在槽中 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 的位置，彼此间距离相等；m_2 和 m_3 静止，m_1 以初速度 $v_0=\frac{\pi R}{2}$ m/s 沿槽运动，R 为圆环的内半径和小球半径之和. 设各球之间的碰撞皆为弹性碰撞，求此系统的运动周期 T.

表达式，要求学生利用能量关系解题，即引力势能为 $E_p=-G\frac{Mm}{r}$（以距离星体 M 无穷远处引力势能为零）.

一个典型的应用是：推导第二宇宙速度的表达式. 即从地表以某一速度发射物体，其运动到距离地球无穷远处时，速度刚好减为零，把这一速度就称为地球的第二宇宙速度（脱离速度）. 由引力势能的概念和机械能守恒定律可列表达式

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}=0+0$$

即在地表发射时的动能和引力势能之和等于飞到无穷远处时的相应能量之和（均为零）.

可解的 $v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$，结合高中已有的知识第一宇宙速度表达式 $v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$，可以看到第二宇宙速度是第一宇宙速度的$\sqrt{2}$ 倍.

另外，可以引导学生进一步思考推出环绕中心天体圆周运动的物体的机械能 E 表达式，即

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2-G\frac{Mm}{r}=-G\frac{Mm}{2r}$$

利用该式可以解决一些本来只能定性理解的问题. 例如：某一人造地球卫星原来轨道半径为 r_1，由于受到外层大气阻力的作用，轨道半径降低为 r_2，已知地球质量 M 和卫星质量 m 及引力常量 G，求阻力做功 $W_{阻}$ 为多少？则利用功能关系和机械能表达式可得

$$W_{阻}=\Delta E=\left(-G\frac{Mm}{2r_2}\right)-\left(-G\frac{Mm}{2r_1}\right)=\frac{GMm(r_2-r_1)}{2r_1r_2}$$

类似题目在多省市高考题中出现，是多数学生解题的难点之一.

以上就是对万有引力定律的 3 种特殊应用所做的总结，在教学中可以引导学生分析和推导出相应结论，不仅方便应用结论解题，还能锻炼学生的物理思维能力和数学运算技巧.

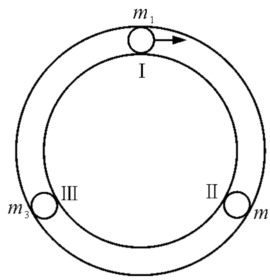

图 1　题目题图

根据竞赛组委会提供的参考答案以及目前相关网站搜索的信息,这道题形成共识的解答思路,就是根据动量守恒定律和机械能守恒定律计算出各个小球之间的每次相互碰撞前后的速度,分析出各次相互碰撞的位置和相邻两次碰撞之间经历的时间,从而得出问题的解.由于要多次涉及高次方程组的求解和多次碰撞的复杂性,使得问题的解答特别困难.

2　试题的简解

根据质点和质点组角动量守恒定律[1] 可知,由于窄槽对 3 个小球组成的系统作用力的力矩为零,因此系统在运动过程中的角动量守恒.

设系统运动过程中质心速度为 v,那么

$$Rm_1v_0=R(m_1+m_2+m_3)v$$

所以

$$v=\frac{m_1}{(m_1+m_2+m_3)}v_0=\frac{1}{5}v_0$$

因此

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi R}{\frac{1}{5}\ \frac{\pi R}{2}}=20\ \mathrm{s}$$

3　共识普遍解[2,3]

由于各个小球之间的碰撞均为弹性碰撞,因此,碰撞过程中系统的动量和机械能都守恒.

依题意可知,球 m_1 经时间 $t_1=\dfrac{\frac{2\pi R}{3}}{v_0}=\dfrac{4}{3}$ s在 Ⅱ 位置与球 m_2 相碰,根据

$$\begin{cases}m_1v_0=m_1v_1+m_2v_2\\ \dfrac{1}{2}m_1v_0^2=\dfrac{1}{2}m_1v_1^2+\dfrac{1}{2}m_2v_2^2\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}v_1=-\dfrac{1}{3}v_0\\ v_2=\dfrac{2}{3}v_0\end{cases}$$

球 m_2 经时间 $t_2=\dfrac{\frac{2\pi R}{3}}{v_2}=2$ s在 Ⅲ 位置与 m_3 碰撞,碰撞后 m_2 和 m_3 交换速度,即

$$v_2'=0\qquad v_3=\frac{2}{3}v_0$$

球 m_3 经时间 $t_3=\dfrac{\frac{2\pi R}{3}}{v_3}=2$ s在 Ⅰ 位置与 m_1 碰撞,又根据

$$\begin{cases}m_3v_3+m_1v_1=m_3v_3'+m_1v_1'\\ \dfrac{1}{2}m_3v_3^2+\dfrac{1}{2}m_1v_1^2=\dfrac{1}{2}m_3v'^2_3+\dfrac{1}{2}m_1v'^2_1\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}v_1'=v_0\\ v_3'=0\end{cases}$$

球 m_1 再经时间 $t_4=\dfrac{\frac{2\pi R}{3}}{v_1'}=\dfrac{4}{3}$ s到 Ⅱ 位置.

至此,3 个小球组成的系统相对于原位置均分别改变了120°,且速度与初始状态相同.故再经过这样两个相同的过程就完成一个系统运动周期 T,因此

$$T=3(t_1+t_2+t_3+t_4)=20\ \mathrm{s}$$

4　思考与讨论

“简解”与“普遍解”的计算量和繁简程度存在很大的反差.由此,引起一些相关问题值得讨论.

(1) 系统的运动周期与各小球的初始位置无关,但初始位置对“普遍解”的计算复杂性有较大的影响.

(2) 各个小球之间的碰撞如果是非弹性碰撞,那么不存在系统运动的周期问题,因为系统不可能恢复到初始状态.

(3) 质点组角动量守恒定律,在特定条件下可理解为切线方向的动量守恒定律.

参 考 文 献

1　漆安慎,杜婵英. 力学. 北京:高等教育出版社,2005. 167 ~ 178

2　第八届全国中学生物理竞赛预赛第一试试题参考答案及评分标准

3　网络. http://www.1010jiajiao.com/gzwl/