竞赛与物理专题研修

# 论卡西尼曲线与无限长均匀带电直线系统等势线的关系

姜付锦　吴　珊

（武汉市黄陂区第一中学　湖北 武汉　430300）

（收稿日期：2016 - 12 - 16）

**摘　要**：通过对卡西尼曲线和伯努利双纽线一般形式的研究得到了其基本的几何性质，由此猜想了广义的卡西尼曲线和广义的卡西尼曲线簇，并用 Maple13 对其进行了数值模拟. 接着推导出了无限长均匀带电直线系统等势线方程，发现其等势线方程与广义的卡西尼曲线簇具有相同的形式，从而证明了广义的卡西尼曲线簇就是无限长均匀带电直线系统等势线.

**关键词**：卡西尼曲线　无限长均匀带电直线系统　等势线

## 1　卡西尼卵形线和伯努利双纽线简介

卡西尼卵形线是这样的曲线：设点 $M$ 到两个定点 $F_1$ 与 $F_2$ 的距离的乘积是个常量，即

$$MF_1 \cdot MF_2 = b^2$$

式中 $b$ 是一个常数. 点 $M$ 的几何轨迹叫做卡西尼卵形线[1].

设 $F_1F_2 = 2a$，取 $F_1F_2$ 所在直线为极轴，线段 $F_1F_2$ 的中点 $O$ 为极点，则可推导出卵形线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2\cos 2\theta \pm \sqrt{a^4\cos^2 2\theta - (a^4 - b^4)}$$

两种情况的图形如图 1 所示，第一种情形对应一条封闭的曲线，第二种情形对应于两个分开的封闭曲线，而当 $a^2 = b^2$ 时，所对应的曲线即伯努利双纽线（图 2）[1]，所对应的方程为

$$r^2 = a^2\cos 2\theta$$

部对水平面的压强.

以上所举的几个易混点是初中学生刚接触力学时最感到困惑不解的，笔者在平时的教学中通过这样的辨析都能够让学生豁然开朗，有助于学生克服对物理学习的畏难情绪，增加学生对物理学习的兴趣.

## 参 考 文 献

1　河南省 2016 年中招考试物理试题 13 题

2　人民教育出版社，课程教材研究所，物理课程教材研究开发中心. 义务教育教科书物理八年级下册. 北京：人民教育出版社，2016. 24

# Analysis on Some Easily Confused Knowledge Point of Mechanics in Junior High School Physics

Wang Heping

（Teaching and research section of Jiaozuo，Jiaozuo，Henan　454150）

**Abstract**：Mechanics is the difficulty of physics learning in junior high school，students are paradoxical in some concept of mechanics，feel mechanics difficult. Through the analysis of students′ initial contact mechanics，the analysis of some easy mixed can let students be suddenly enlightened，help students to overcome the physical learning.

**Key words**：junior middle school physics；mechanics；easily confused knowledge point；analysis

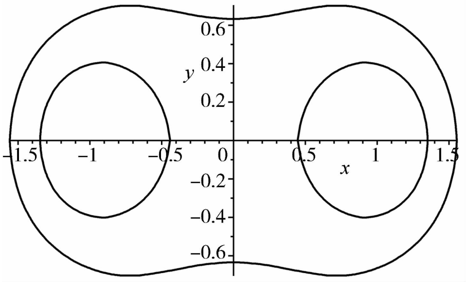



图 1　$a^2 < b^2, a^2 > b^2$ 卵形线

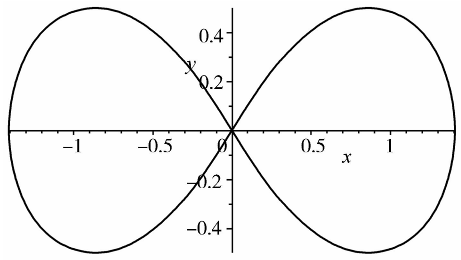



图 2　伯努利双纽线

对于卵形线和双纽线,还有下列性质[2]:

(1) 当 $a^2 < b^2, a^2 = b^2, a^2 > b^2$ 时,$r$ 的最大值和最小值分别为

$$r_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r_{\min} = \sqrt{|a^2 - b^2|}$$

(2) 当 $b^2 \geqslant 2a^2$,曲线是一条凸曲线.

(3) 当 $b^2 = 0$ 时,曲线退化为 2 个点,即 $F_1$ 和 $F_2$.

## 2　广义的卡西尼曲线

设 $F_1, F_2, F_3, \cdots, F_N$ 是平面内 $N$ 个定点,点 $M$ 到 $F_1, F_2, F_3, \cdots, F_N$ 的距离满足以下等式

$$MF_1^{\tau_1} \cdot MF_2^{\tau_2} \cdot \cdots \cdot MF_N^{\tau_N} = b^N$$

点 $M$ 的轨迹就是广义上的卡西尼曲线,式中 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N$ 为一系列的实数,$b, N$ 为两个实数.

若 $N = 2$,$b$ 变化时,则会得到一个卡西尼曲线簇,如图 3 和图 4 所示. 由图可知,它们开始是分离的两个卵形曲线,后来会变成一个完整的曲线;若 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N$ 的正负相同,则会有伯努利双纽线;若 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N$ 正负不同,不会形成伯努利双纽线.

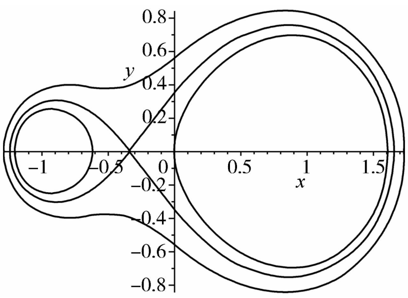



图 3　广义的卡西尼曲线簇 $\tau_1 = 2, \tau_2 = 1$

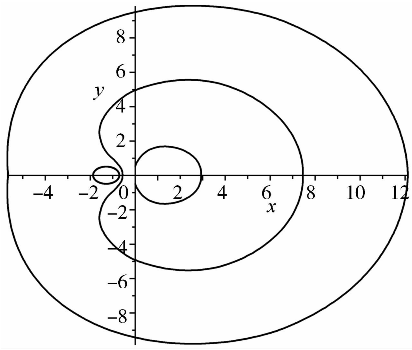



图 4　广义的卡西尼曲线簇 $\tau_1 = 2, \tau_2 = -1$

## 3　无限长均匀带电直线系统形成的等势线

若能求出一根无限长均匀带电直线的等势线方程,再利用电势的叠加原理就可以得出多根无限长均匀带电直线的等势线方程.

### 3.1　一根无限长均匀带电直线产生的电势[3]

如图 5 所示,设无限长均匀带电直线电荷的线密度为 $\tau$,$P$ 点到导线的垂直距离为 $R$,电荷元 $\tau \mathrm{d}z$ 到 $P$ 点的距离为 $\sqrt{R^2 + z^2}$,则

$$\varphi(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau \mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} =$$

$$\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln(z + \sqrt{R^2 + z^2}) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

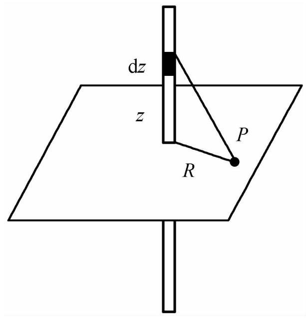



图 5　均匀带电无限长直线的电势

积分结果是无穷大,无穷大的出现与电荷不是有限区域内的分布有关. 计算两点 $P$ 与 $P_0$ 的电势差可以不出现无穷大. 设 $P_0$ 点与导线的垂直距离为 $R_0$,则 $P$ 点与 $P_0$ 点的电势差为

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = \lim_{M \to \infty} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{z + \sqrt{R^2 + z^2}}{z + \sqrt{R_0^2 + z^2}}\right) \Big|_{-M}^{+M} =$$

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\dfrac{R^2}{M^2} + 1}}{1 + \sqrt{\dfrac{R_0^2}{M^2} + 1}} \frac{-1 + \sqrt{\dfrac{R_0^2}{M^2} + 1}}{-1 + \sqrt{\dfrac{R^2}{M^2} + 1}}\right) =$$

$$\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_0^2}{R^2}=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{R_0}$$

若选 $P_0$ 为参考点，规定 $\varphi(P_0)=0$，则

$$\varphi(R)=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{R_0}$$

### 3.2　两根无限长均匀带电直线形成的等势线方程

如果平面上有两根无限长带电直线，则某点 $M$ 的电势可以写成

$$\varphi(M)=-\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{MF_1}{R_0}-\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{MF_2}{R_0}$$

式中 $\tau_1$，$\tau_2$ 分别为两根无限长带电直线电荷的线密度，$F_1$，$F_2$ 分别为两根无限长带电直线的中心点，$P_0$ 为参考点，规定 $\varphi(R_0)=0$[4].

若设

$$-\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{MF_1}{R_0}-\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{MF_2}{R_0}=C$$

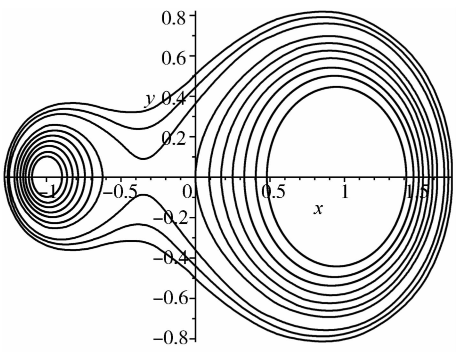
则可以化简为

$$MF_1^{\tau_1}\cdot MF_2^{\tau_2}=R_0^{\tau_1+\tau_2}\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon_0 C}$$

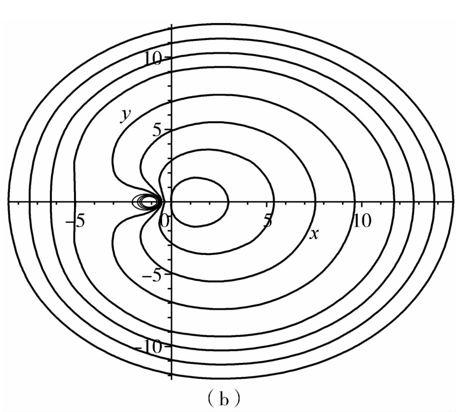
若令 $R_0^{\tau_1+\tau_2}\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon_0 C}=b^2$，则可变为广义的卡西尼曲线的一般形式

$$MF_1^{\tau_1}\cdot MF_2^{\tau_2}\cdot\cdots\cdot MF_N^{\tau_N}=b^N$$

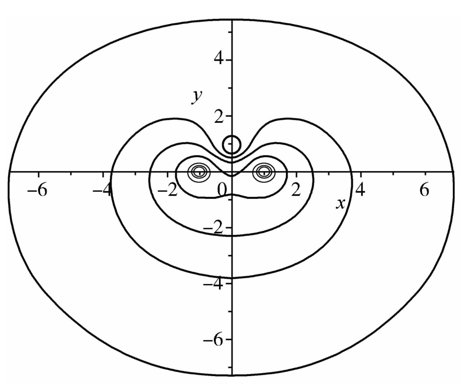
当式中 $b$ 取不同的数值时就会得到广义的卡西尼曲线簇，如图 6 所示.



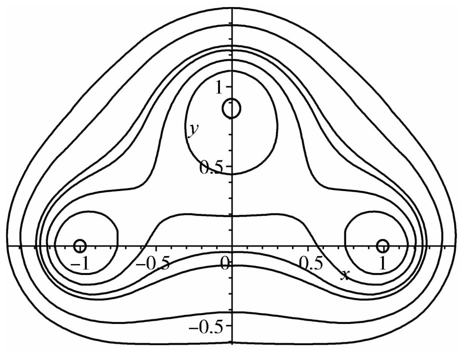

(a)




(b)




(c)




(d)

图 6　广义的卡西尼曲线簇

## 4　结束语

广义的卡西尼曲线簇在本质上是无限长均匀带电直线系统形成的等势线，其中卵的中心就是每根带电直线的中心，若这些中心某几个可以包裹在一个封闭的曲线里，则说明它们带电的性质相同；若开始相互隔开的，则它们的电性相反；若某几个中心开始是隔开的最后在更远距离上包裹在一个封闭的曲线里，则说明后来被包裹的那个直线的电荷量小于包裹它的那几根直线的总电荷量. 无限长均匀带电直线系统的等势线还可以利用莫尔条纹来分析[4]，限于篇幅这里不再赘述.

## 参 考 文 献

1　B·H·斯米尔诺夫著. 高等数学教程. 孙念增，译. 北京：商务印书馆，1956. 200 ～ 201

2　王叙贵. 多卵线与多纽线 —— 卡西尼卵形线与伯努利双纽线的推广. 昆明师范高等专科学校学报，2001，23(4)：34 ～ 36

3　郭硕鸿. 电动力学. 北京：高等教育出版社，2012. 37 ～ 43

4　李治林，刘建科. 利用莫尔条纹模拟叠加静电场的等势线. 大学物理，2011(6)：47 ～ 51