

考虑空气阻力与速度平方成正比的斜抛运动

郭雪鹏

(临泉第一中学 安徽 阜阳 236400)

(收稿日期:2016-12-25)

摘要:物体在空气中运动,不可避免地受到空气阻力,有时空气阻力的作用必须加以考虑,例如炮弹射击.物体速度较大,阻力 $f \propto v^2$.考虑阻力 $f = -kv^2$,建立运动模型,运用MATLAB软件数值求解,研究物体的运动性质、轨迹、射程和射高,并与无空气阻力的斜抛运动对比.

关键词:斜抛运动 阻力 轨迹 射高 射程 Matlab 数值计算

1 前言

物体做斜抛运动,无空气阻力,物体的运动规律容易求解得到.实际上,物体总是要受到空气阻力,有时空气阻力的作用必须加以考虑,例如炮弹的飞行轨迹.研究表明,速度较小,空气阻力正比于速度, $f = -kv$;速度较大,阻力正比于速度的二次方, $f = -kv^2$.速度继续增加,阻力与速度的更高次方有关.本文考虑空气阻力 $f = -kv^2$,研究物体的运动性质.

2 建立模型

考虑球形物体例如炮弹飞出后的轨迹,炮弹的速度一般在1000 m/s左右,此时空气阻力必须加以考虑.球形物体半径为 r ,质量为 m .先来考虑阻力的特点.物体在流体中运动,阻力是比较复杂的,与多种因素有关.这里并不需要对阻力加以详细的考察,只需要知道阻力的规律即可.流体力学中一个重要参数为雷诺数 Re ,雷诺数较小,空气阻力 $f = 6\pi\eta r v$, η 为流体的粘性系数,对于空气,温度为20℃, $\eta = 1.82 \times 10^{-5}$ Pa·s.当雷诺数 $Re \approx 10^3 \sim 10^5$,阻力 $f = 0.2\pi\rho r^2 v^2$ ^[1], ρ 为流体密度.空气密度 $\rho = 1.205$ kg/m³(温度为20℃,一个标准大气压)^[2].

取空气阻力 $f = -kv^2$,先估算 k 的大小,下文需要数值计算求解斜抛运动,了解 k 的大小是很有

必要的.由阻力表达式,可知 $k = 0.2\pi\rho r^2$,球体半径取0.1 m, k 的数量级约为 10^{-3} .

球体从地面斜向上飞出,初速度为 v_0 ,与水平方向夹角为 θ . t 时刻物体的速度为 v ,与水平方向夹角为 α ,水平分速度为 v_x ,竖直分速度为 v_y ,受力如图1所示.

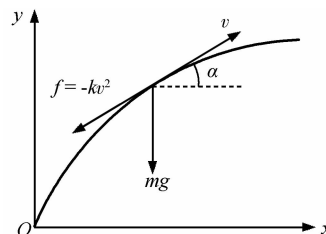


图1 受力示意图

将空气阻力沿 x 方向和 y 方向分解,根据牛顿第二定律

$$-kv^2 \cos \alpha = m \ddot{x} \quad (1)$$

$$-mg - kv^2 \sin \alpha = m \ddot{y} \quad (2)$$

利用 $\sin \alpha = \frac{v_y}{v}$, $\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$,式(1)和式(2)变为

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} \quad (3)$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} - g \quad (4)$$

初始条件为

$$\begin{cases} x|_{t=0} = y|_{t=0} = 0 \\ \dot{x}|_{t=0} = v_0 \cos \theta \\ \dot{y}|_{t=0} = v_0 \sin \theta \end{cases} \quad (5)$$

求出式(3)和(4)的解,物体的运动情况便能完全确定.困难之处恰恰在于求解方程,方程不一定存在解析解.物理学中很多方程很难求出解析解,甚至于根本就没有解析解.在没有解析解的情况下,可以利用 Matlab 软件数值求解. Matlab 软件是一款功能强大的科学计算软件,在科学研究中有着广泛的应用.式(3)和(4)可以利用 Matlab 软件数值求解.

3 数值求解与结果分析

3.1 编写程序

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{x}_3 = \dot{y}$, 式(3)和(4)变为一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} \sqrt{x_2^2 + x_4^2} x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{k}{m} \sqrt{x_2^2 + x_4^2} x_4 - g \end{cases} \quad (6)$$

根据式(6)编写函数文件 xiepaom.m. 为输入方便,令 $A = \frac{k}{m}$, 程序代码为:

```
function x = xiepaom(t,x)
global A % 设置全局变量 A = k/m
global g % 设置全局变量重力加速度
x = [x(2); -A * sqrt(x(2)^2 + x(4)^2) *
x(2); x(4); -A * sqrt(x(2)^2 + x(4)^2) * x(4) -
g];
```

求解时间为从抛出到物体落回地面. 物体落到地面的时间在求解前并不知道,为解决这一问题,可以利用 Matlab 的事件(events)功能. 使用方法可参阅参考文献[3]或 Matlab 的帮助命令. 程序代码为:

```
function
[value,isterminal,direction] = events(t,x)
value = x(3);
isterminal = 1;
direction = -1;
求解主程序为:
```

```
clear;clc
global A
A = input('请输入 A = '); % 从键盘输入 A 值
global g;g = 10; % 重力加速度取 10 m/s2
```

```
theta = input('请输入初速度方向与水平方向
夹角 θ = ');
```

```
v0 = input('请输入初速度 v0 = ');
```

```
t1 = 2 * v0 * sin(theta * pi/180)/g % 不考虑
阻力的落地时间
```

```
H1 = (v0 * sin(theta * pi/180)).^2/(2 * g) %
不考虑阻力的射高
```

```
X1 = v0 * cos(theta * pi/180) * t1 % 不考虑
阻力的射程
```

```
x0 = [0;v0 * cos(theta * pi/180);0;v0 * sin(t
heta * pi/180)]; % 初始条件
```

```
opts = odeset('events',@events);
```

```
[t,x,tfinal] = ode45(@xiepaom, [0,Inf],x0,
opts);
```

```
tfinal % 输出落地时间
```

```
H = max(x(:,3)) % 输出有阻力的射高
```

```
X = max(x(:,1)) % 输出有阻力射程
```

```
figure (1)
```

```
subplot(3,2,1)
```

```
xx = v0 * cos(theta * pi/180) * t;yy = v0 *
sin(theta * pi/180) * t - 0.5 * g * t.^2;
```

```
plot(x(:,1),x(:,3),'- ',xx,yy,' * - ');运
动轨迹
```

```
legend('有阻力 ','无阻力 ')
```

```
xlabel('\itx/m');ylabel('\ity/m');grid on
```

```
subplot(3,2,3)
```

```
VX = v0 * cos(theta * pi/180);VY = v0 * sin
(theta * pi/180) - g * t;
```

```
V = sqrt(VX.^2 + VY.^2); % 无阻力速度大小
```

```
v = sqrt(x(:,2).^2 + x(:,4).^2); % 有阻力合
速度大小
```

```
plot(t,v,'- ',t,V,' * - ') % 绘制速率时间
图像
```

```
legend('有阻力 ','无阻力 ')
```

```
xlabel('t/s');ylabel('v/(m/s)');grid on
```

```
subplot(3,2,4)
```

```
alpha = acosd(x(:,2)./v); % 有阻力速度方
向与水平方向夹角
```

```
alpha1 = acosd(VX./V); % 无阻力速度方向
与水平方向夹角
```

```

plot(t,alpha,'- ',t,alpha1,'* - ')
legend('有阻力','无阻力')
xlabel('t/s');ylabel('\it\alpha');grid on
subplot(3,2,5)
plot(t,x(:,2),'- ',t,VX,'* - ')% 水平分速度
legend('有阻力','无阻力')
xlabel('\itt/s');ylabel('\itv_x(m/s)');grid on
subplot(3,2,6)
plot(t,x(:,4),'- ',t,VY,'* - ')% 竖直分速度
legend('有阻力','无阻力')
xlabel('\itt/s');ylabel('\itv_y(m/s)');grid on

```

程序具有交互功能,运行后要求从键盘输入 A 值($A = \frac{k}{m}$)、初速度大小、初速度方向和水平方向的夹角 θ . 输入完毕后,可描绘存在空气阻力和不考虑空气阻力两种情况下物体的轨迹、速率-时间图像、速度方向与水平方向夹角 α -时间图像、水平分速度-时间图像和竖直分速度-时间图像,并输出物体的落地时间 t ,射高 H 以及射程 X .

3.2 数值求解和结果分析

设球体半径为 r ,密度为 ρ_0 ,那么

$$A = \frac{k}{m} = \frac{0.2\pi\rho r^2}{\rho_0 \frac{4\pi}{3}r^3} = \frac{0.15\rho}{\rho_0 r} \quad (7)$$

假设球体的半径约为 0.1 m ,铁^[4]的密度约为 $7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, A 的数量级约为 10^{-4} . 取 $A = 0.001$,初速度 $v_0 = 300 \text{ m/s}$,初速度方向与水平方向夹角 $\theta = 60^\circ$. 求解结果如表 1 所示.

表 1 有阻力和无阻力抛体运动对比

物理量	有阻力	无阻力
落地时间 t/s	26.9	51.9
射高 H/m	914.2	3 375
射程 X/m	1 235.9	7 794.2

结论: 和不考虑空气阻力相比较,考虑空气阻力后,抛射体落地时间变小,射高降低,射程变短.

图 2 所示为物体的轨迹,无空气阻力轨迹为抛

物线;考虑空气阻力,物体的轨迹不再是抛物线.

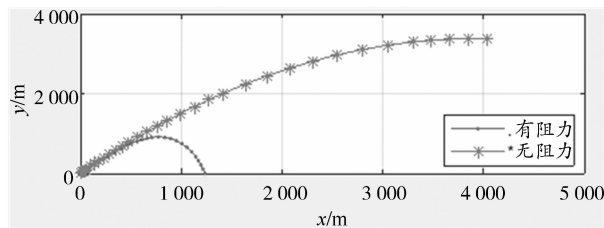


图 2 轨迹

图 3 为速率-时间图像. 其共同特点是速率均先减小后增大,有空气阻力时,速率减小得更快,物体落回到地面,速率小于抛出时的初速度,物体动能减小;不考虑空气阻力,落回到地面时的速率等于初始速率,物体动能不变.

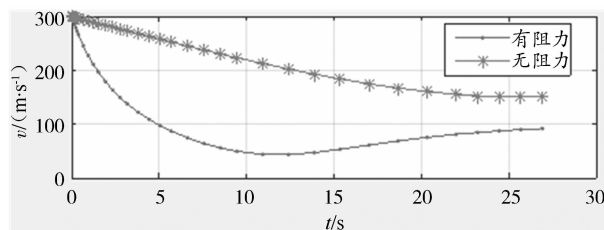


图 3 速率

图 4 为物体速度方向与水平方向夹角随时间变化图像. 无阻力时的图像求解时间没有到物体落回到地面. 无阻力时,物体上升或下降到同一高度时,速度方向与水平方向夹角相等,图像关于物体上升到最高点的时刻对称. 考虑空气阻力后,这种对称性遭到破坏.

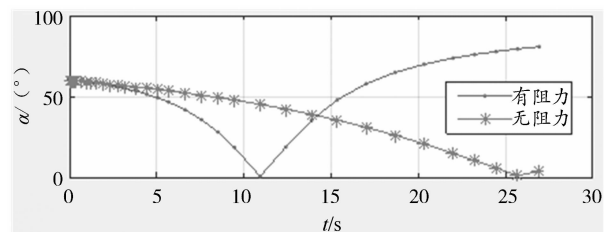
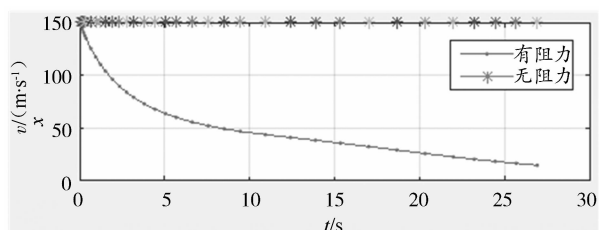
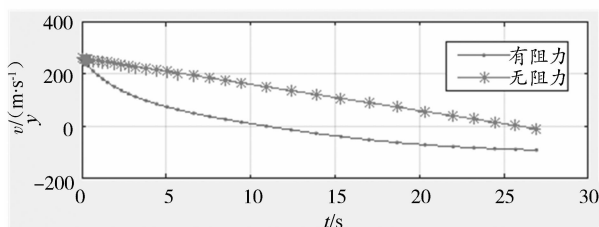


图 4 速度方向与水平方向夹角

图 5(a) 和(b) 分别为物体的水平分速度和竖直分速度随时间变化图像. 无空气阻力,水平分速度不变;有空气阻力,水平分速度逐渐减小,从图像可以看出,水平分加速度逐渐减小,在水平方向物体做加速度减小的减速运动,落到地面,水平分速度最小. 无空气阻力,竖直分速度图像是一条倾斜的直线,斜率代表重力加速度;考虑阻力,图像是一条曲线,竖直分加速度随时间改变.



(a) 水平分速度



(b) 竖直分速度

图5 水平分速度和竖直分速度

上面就一个具体例子对比分析有空气阻力和无空气阻力物体的运动特点,感兴趣的读者可以利用上述程序输入不同数值实验.

4 结束语

最后对本文的内容做一个小结.本文研究考虑空气阻力 $f = -kv^2$ 后抛射体的运动特点,利用 Matlab 软件数值求解物体的射高、射程,描绘物体的轨迹以及速度-时间图像,并与无空气阻力的斜抛运动进行对比.高中阶段,学生学习了大量的理想模

型,比如自由落体运动、平抛运动、斜抛运动、匀速圆周运动…….实际上,这些理想运动都是实际运动的近似,忽略掉了很多因素.由于此种原因,学生普遍有这种感觉:物理离实际生活很遥远,学物理仅仅是做物理练习题.为避免这种认识的产生,在教学中有必要向学生展示一些真实的情境.根据实际情境,经历物理学研究方法,提出问题,建立数学模型,对模型求解,实验验证.在教学中,适当增加这些活动,对提高学生利用所学知识解决实际问题的能力都有很大的帮助,也会增加学生学习物理的热情,这种探索活动值得在教学中尝试.

参考文献

- 1 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程 力学(第2版).北京:高等教育出版社,2004.237~239
- 2 http://baike.baidu.com/link?url=L6VJVeCuRFwUAD1e6KVM1AZYVEZnrNa_AE2ugUYOqXFhZ1DwzFLlv3BVkG_hlx7aD0PKB8jqSrJ9PBHekhdmRF0Vvw_n80xBkH52QHBlOj6lfcXcbJerRWvHYcDO7Qqt[2016-12-25]
- 3 彭芳麟.计算物理基础.北京:高等教育出版社,2010.216~220
- 4 http://baike.baidu.com/link?url=c3deDfdwx6YNVfRTxIXLj4znsWjA9Xy9SdA0ci-lhYcUMJ0lAWjG1Io4nYIF7nC3RmfZnoAV4lK_8FX_deSB5_[2016-12-25]

The Oblique Projectile Motion Considering the Air Resistance Being Proportional to the Velocity Square

Guo Xuepeng

(LinQun No.1 Senior High School, Fuyang, Anhui 236400)

Abstract: When moving in the air, objects experience air resistance inevitably. Sometimes the force of air resistance must be considered, for example, when shells are shot, the speed is relatively high and air resistance is. Considering air resistance, we can build motion model and apply Matlab software to seek the numerical computation. In this article, I will study the motion essence, trajectory, range and altitude of objects, and compare it with oblique motion without air resistance.

Key words: oblique projectile motion; air resistance; trajectory; range; Matlab; numerical computation