

关于手指转笔模型的分析

胡长城 陈铁松

(长春吉大附中实验学校 吉林 长春 130021)

(收稿日期:2016-12-27)

摘要:针对一道关于转笔模型的物理竞赛试题,从不同的角度给出题目的解法,使读者对模型的认识更加透彻,并进一步掌握质心坐标系的应用.

关键词:转笔模型 参考系 质心运动定律

1 题目

在你思考问题时有用手指转笔的习惯吗?请你用下述刚体简化模型,进行分析计算.

手指转笔的刚体简化模型:如图1所示,设手指为半径为 R 的圆柱,笔看成质量为 m 且质量分布均匀的细直杆,其回转半径为 ρ (对质心 C 转动惯量为 $m\rho^2$). 设手指保持不动,开始时笔在距质心 C 距离为 ρ 的 A 处与手指相切,初角速度为 ω_0 . 设 $\rho > \pi R$, 且笔始终在垂直于手指的同一平面内转动,忽略笔重力的影响.

求:笔(以下把笔简称为杆)绕手指无滑动转一周中,手指(以下把手指简称为圆柱)作用于杆的正压力和摩擦力的大小(表示为 AC 长度 x 的函数).

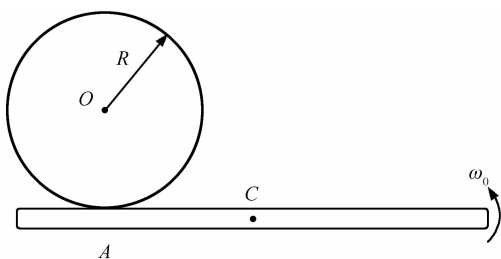


图1 手指转笔的刚体简化模型

2 角速度的求解

在杆旋转的过程中,杆在某时刻的角速度是一个关键的物理量,先把角速度这个关键的物理量表示成 x 的函数. 杆在转动过程中机械能守恒

$$\frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

其中 I_0 是杆在初始位置时的转动惯量

$$I_0 = m\rho^2 + m\rho^2 = 2m\rho^2$$

I 是杆转到 AC 长度为 x 时候的转动惯量

$$I = m\rho^2 + mx^2$$

解得

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{2\rho^2}{\rho^2 + x^2}}$$

3 正压力的求解

方法1:通过运动学关系求出质心的切向加速度,进一步利用质心运动定律求解

解题思路:利用运动学的关系求出杆质心速度,进一步求导得到杆质心的切向加速度. 利用质心运动定律求解圆柱对杆的支持力.

设某时刻杆绕圆柱旋转的角速度为 ω , A 点是杆的速度瞬心,则杆质心的速度大小 $v_C = \omega x$,将质心速度大小(即速率)对时间求导,得质心的切向加速度

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{d(\omega x)}{dt} = \omega \frac{dx}{dt} + x \frac{d\omega}{dt}$$

如图2所示,由杆做纯滚动的条件 $x = \rho - R\theta$, 两边对时间求导得

$$\frac{dx}{dt} = -R \frac{d\theta}{dt} = -\omega R$$

而

$$x \frac{d\omega}{dt} = x \frac{d\omega}{dx} \frac{dx}{dt} = -x \frac{d\omega}{dx} \omega R = -\frac{xR}{2} \frac{d(\omega^2)}{dx}$$

得

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{d(\omega x)}{dt} = \omega \frac{dx}{dt} + x \frac{d\omega}{dt} = \\ &= -\omega^2 R - \frac{xR}{2} \frac{d(\omega^2)}{dx} = -\frac{2\omega_0^2 \rho^4 R}{(\rho^2 + x^2)^2} \end{aligned}$$

由质心运动定律得

$$N = -m \frac{dv_C}{dt} = \frac{2m\omega_0^2 \rho^4 R}{(\rho^2 + x^2)^2}$$

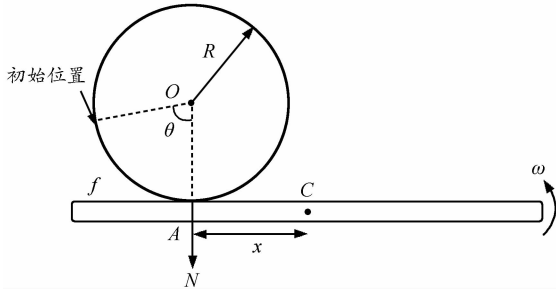


图2 方法1分析图

方法2:利用加速度的牵连关系求出杆质心的加速度,进一步利用质心运动定律求解

解题思路:通过加速度的牵连关系找出在地面系中杆上A点的加速度,进一步表示出杆质心的切向加速度,利用质心运动定律求解支持力。

设杆上与圆柱的接触点为点A,圆柱上与杆的接触点为点A'。假设有一静止杆,圆柱在其上面纯滚动,则圆柱上与杆接触点和杆上与圆柱接触点的相对加速度为 $\omega^2 R$,其中 ω 为圆柱体滚动的角速度,R为圆柱体的半径。此题中选择与杆静止参考系(此参考系既平动又转动),则A与A'相对加速度亦为 $\omega^2 R$ 。将A与A'两点加速度由杆静止参考系变换至地面系中,变换式为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{平}} + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

由于A与A'矢径 \mathbf{r} ,相对杆静止参考系的速度 \mathbf{v}' 均相同,故在地面系下的相对加速度不变,则 $a_A = \omega^2 R$,方向由O指向A。如图3所示,以A点为基点(参考系)来表示杆质心C的加速度

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_C^n + \mathbf{a}_C^t = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA}^n + \mathbf{a}_{CA}^t$$

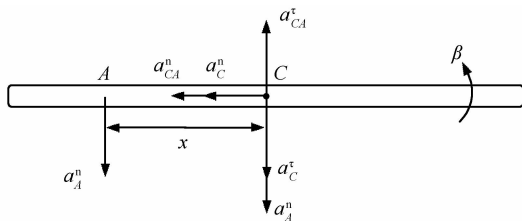


图3 方法2分析图

由于A点为杆上与杆固连的点,故A点与C点之间无相对速度,故

$$a_{CA}^t = \ddot{\theta} r + 2\dot{\theta} \dot{r} = \beta x$$

$$a_{CA}^n = -\ddot{r} + \dot{\theta}^2 r = \omega^2 x$$

将这两个式子与 $a_A = a_A^n = \omega^2 R$ 一起代入质心C加速度表达式中,得

$$a_C^t = \omega^2 R - \beta x = -\frac{2\omega_0^2 \rho^4 R}{(\rho^2 + x^2)^2}$$

$$a_C^n = \omega^2 x$$

根据质心运动定律

$$N = -ma_C^t = \frac{2m\omega_0^2 \rho^4 R}{(\rho^2 + x^2)^2}$$

注意: $a_A = \omega^2 R$ 也可通过以下方式求得。设无穷小时间 dt 里,杆转过 $d\theta$ 角,则杆上原A点与现在A点的距离为 $dl = R d\theta$,则

$$dv_A = \omega dl = \omega R d\theta$$

$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = \omega R \frac{d\theta}{dt} = \omega^2 R$$

方法3:利用转动定律求解

解题思路:在质心系中考察体系相对质心的角动量随时间的变化时,质心是与杆固连的点,由于质心系是平动系,惯性力的大小与刚体内各质点的质量成正比,方向与质心的加速度方向相反。这样,惯性力和重力一样,惯性力对质心的总力矩为零,即不论质心系是惯性系还是非惯性系,在质心系中,角动量定理仍然适用,不需要附加惯性力的影响。

选取杆的质心为转动参考点,应用角动量定理得

$$Nx = m\rho^2 \frac{d\omega}{dt} = m\rho^2 \frac{d\omega}{dx} \frac{dx}{dt}$$

上式代入 $\frac{dx}{dt} = -\omega R$,得

$$N = \frac{2m\omega_0^2 \rho^4 R}{(\rho^2 + x^2)^2}$$

4 摩擦力的求解

方法1:以一个绕圆柱做圆周运动的几何点为参考系

解题思路:以一个既不是杆上的点也不是圆柱上的点,而是一个在圆柱表面绕其做圆周运动的几何点A''为参考系。求出相关加速度,由质心运动定律求解。

A''点的切向加速度

$$a_{A''}^t = \frac{dv_{A''}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$$

(下转第73页)

(6) 一辆质量为 2 500 kg 的汽车沿水平路面由静止开始行驶,并始终以额定功率 60 kW 工作,所受阻力恒为 2×10^3 N,则:

- 1) 当汽车速度达到 6 m/s 时,加速度为多大?
- 2) 汽车最终达到的最大速度为多大?(“运用”)

(7) 变速自行车在上坡的时候要换成低速挡还是高速挡,为什么?(“运用”)

(8) 请从功率的角度对我们的绿色生活提一个建议。(“接受”)

3.4.2 测试题目说明

本测试题的安排是按照布卢姆的教学目标分类进行的.其测试内容直接针对教学目标,从而能够科学地检测教学过程是否合理,教学效果是否良好.其中,教学目标(1):对应测试题1和2;教学目标(2):对应测试题3和4;教学目标(3):对应测试题5;教学目标(4):对应测试题6和7;教学目标(5)、(6):对应测试题8.

(上接第68页)

在 A'' 系下,质心 C 沿杆方向的法向加速度

$$a_{C'}^n = -\ddot{x} + x\dot{\theta}^2 = -\frac{d(-\omega R)}{dt} + \omega^2 x = R \frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x$$

则在地面系下

$$a_C^n = a_{C'}^n - a_{A''}^n = \omega^2 x = \frac{2\rho^2 \omega_0^2 x}{\rho^2 + x^2}$$

由质心运动定理得

$$f = ma_C^n = \frac{2m\rho^2 \omega_0^2 x}{\rho^2 + x^2}$$

方法2:以杆上的 A 点为参考系

解题思路:设杆上与圆柱的接触点为 A 点,纯滚动条件保证了地面系中 A 点沿杆方向的加速度为零.由于 AC 距离不变,以 A 为参考系, C 的法向加速度 $a_{C'}^n = \omega^2 x$,在地面系下

$$a_C^n = a_{C'}^n + 0 = \omega^2 x = \frac{2\rho^2 \omega_0^2 x}{\rho^2 + x^2}$$

由质心运动定律得

$$f = ma_C^n = \frac{2m\rho^2 \omega_0^2 x}{\rho^2 + x^2}$$

5 结束语

通过以上分析可知,采用质心运动定律求解杆

4 总结

总之,不论是哲学取向教学论还是科学取向教学论,其最终目的在于通过知识的意义学习促进人的发展,虽然立论基础不同,但两者各有所长.教学设计者应将两者有机结合,才能扬长避短,左右逢源.

参考文献

- 1 皮连生.科学取向的教学论的核心理念及其应用的基本操作程序.当代教育科学,2012(8):3~30
- 2 吴红耘,皮连生,林红.基于 ADDLE 模型的“教师学习”范式——以苏州市实验小学语文老师专业成长为例.教育科学研究,2013(9):69~76
- 3 潘庆玉.当前国内教学理论研究热点扫描与问题反思.课程教学研究,2013(2):5~10
- 4 皮连生.运用科学取向教学论,引领教改新方向.教育科学研究,2013(8):5~11
- 5 陈刚.试论物理概念和规律的学习与教学设计.物理教学,2012(7):11~16
- 6 陈刚.物理教学设计.上海:华东师范大学出版社,2009.118

受到的正压力时,需要在惯性系中表示质心的切向加速度.方法1中为求解切向加速度需要对质心速率进行求导;方法2中以杆与圆柱接触的 A 为基点,采用加速度牵连关系表述杆质心 C 的切向加速度,上述两种方法求解需要复杂的数学运算和在不同参考系下进行加速度变换,容易出现运算上的错误.方法3中直接选择杆的质心为转动参考点,这样避免了惯性力带来的影响,直接求出杆质心 C 的切向加速度,这种方法简单.采用质心运动定律求解杆受到的摩擦力时,以一个绕圆柱做圆周运动的几何点 A'' 点为参考系和以杆上的 A 点为参考系有本质的区别, A'' 点是一个做圆周运动的几何点,不受杆的动力学关系束缚,杆绕圆柱纯滚动保证了地面系中 A 点沿杆方向的加速度为零.

参考文献

- 1 舒幼生.力学.北京:北京大学出版社,2005.52~65
- 2 赵凯华,罗蔚茵.力学.北京:高等教育出版社,2003.167~178