

一题三解 各显其妙

葛舟凡

[浙江省宁海中学高三(3)班 浙江 宁波 315600]

(收稿日期:2017-01-05)

摘要:旨在通过一题多解,优化解题策略,提高运用数学知识提高解决物理问题的能力.

关键词:习题 妙解 导数

近期科任老师在二轮复习教学中,讲了一类动态变化的极值问题,其中有这样一道关于瞬时功率的经典习题,同学们拿到习题后都议论纷纷,怎样快速地找出最大值所在处?这其实离不开数学知识的运用.

【题目】一端固定在O点的一轻绳拴一小球,现将小球用手拉起,使轻绳水平拉直,小球处于A位置,然后将小球无初速度的释放,如图1所示,小球运动的最低点为B点,那么,在A到B的过程中,小球所受重力的瞬时功率如何变化?何处取得最大值?

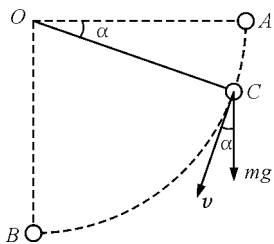


图1 题目题图

解法一:极端分析法

对于重力功率如何变化这个问题,同学们从瞬时功率的表达式出发 $P = mgv \cos \alpha$ 出发,因为A的速度为零,B点的速度方向与重力方向间的夹角为 90° ,所以很容易得到A,B点的重力的瞬时功率为零,继而得到从A到B的过程中重力的瞬时功率先增大后减少的变化规律.

那么,在何处有最大值,则离不开运用数学知识的推理.

解法二:基本不等式法

设C位置重力的瞬时功率最大,绳长为L,此时小球运动到与水平方向成 α 角,则速度 v 与重力 mg 之间的夹角也为 α . 根据重力的瞬时功率

$$P = mgv \cos \alpha \quad (1)$$

从A到C由动能定理或机械能守恒定律,得

$$mgL \sin \alpha = \frac{1}{2} mv^2 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$P = mg \sqrt{2gL \sin \alpha \cos^2 \alpha} \quad (3)$$

至此,得到式(3)后,就转化为如何求“ $\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ ”的极值问题了.

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos^2 \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} (2 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha)} \end{aligned} \quad (4)$$

根号内3个数乘积求极值,与这3个数相加的关系是什么呢?

由基本不等式

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3$$

(a, b, c 均为正数,且 $a = b = c$ 时取等号)

注意到

(下转第63页)

要对学生的回答根据其回答情况给予全面、准确的评价,在评价中注意正面的激励和引导.评价的方式包括:

(1) 完全正确的回答,教师要肯定其成绩,并予以表扬,教师可以重复学生的回答,表示予以确定;

(2) 不完全正确的回答,要肯定其答案中的合理性,又要使之明确错误所在,同时重点引导学生全面思考,培养学生思维的严谨性,引导其思维方法和思维能力的发展.

(3) 对完全错误的回答,要让学生把话说完,并引导其他学生参与评价、矫正和扩展,并对他的更正予以鼓励.

著名教育家陶行知先生说:“发明千千万,起点是一问.智者问得巧,愚者问得笨,人力胜天功,只在每事问.”物理高效课堂的提问不仅在于“问”,更重是在于采用合适的策略进行提问.不同的课堂有不同的提问策略,教师必须针对每堂课的具体特点,根据自身的实际,采用不同的方式方法.教师只有通

过有效的课堂提问,才能多角度、多层次地调动学生学习的内动力,加强教与学的和谐互动,充分发挥提问的有效价值,从而极大地激发学生的思维,提高教学的有效性.

参考文献

- 1 张民生.上海市中学物理课程标准解读.上海:上海教育出版社,2006
- 2 黄爱华.课堂教学艺术.石家庄:河北教育出版社,2001
- 3 梁旭.中学物理教学艺术研究.杭州:浙江大学出版社,2005
- 4 刘利.运用原始物理问题培养中学生物理能力的实践研究:[硕士学位论文].北京:首都师范大学,2006.22
- 5 叶建柱.论物理教学中提出问题的水平.课程·教材·教法,2007(5):58~61
- 6 徐旭华.物理课堂教学提问的艺术.南阳师范学院学报,2006(9):122~124
- 7 彭红艳.新课程背景下中学物理有效课堂提问的策略.物理通报,2011(6):24~26

(上接第59页)

$$2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2$$

由此可得,当 $2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, 即

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$$

重力的瞬时功率达到最大值.

解法三:利用导数法

得到 $P = mg \sqrt{2gL \sin \alpha \cos^2 \alpha}$ 的表达式后,对功率 P 求导得

$$P' = mg \sqrt{2gL} \frac{(\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha)}{2 \sqrt{\sin \alpha} \cos \alpha} =$$

$$mg \sqrt{2gL} \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha}{2 \sqrt{\sin \alpha}} = 0$$

当 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, P 具有极值,再求 P 在 $\sin \alpha =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处的二阶导数,得

$$P'' = -mg \sqrt{2gL} \cos \alpha \sqrt{\sin \alpha} < 0$$

即可知 P 有最大值.

点评:方法一是把所给问题中的状态直接推至极端状态,通过对极端状态的分析,达到对非极端状态作出正确判断的目的.当题目要求定性判断某一物理量随其他物理量变化的趋势时,可假设其他变量为极端情况,判断出该量在这种极端情况下有无最大值或最小值,进而可推出该量的变化趋势.方法二运用基本不等式,属于比较常规的方法,难得之处是涉及3个变量,因此具有一定的难度.方法三运用导数求解,巧思妙解,体现知识的活用,还比如在图像问题中的斜率实质也是求导,导数在物理学的应用实质上是物理内容结合到它的几何意义中,导数在求解物理量极值时具有比较简单方便等优势,不拘一格,实属创新之杰作.综上可以看出通过一题多解有助于从不同的角度去分析问题,优化解题策略,开拓思维,提高运用数学知识解答物理问题的能力.