

曲线运动的“身世之谜”

张祖志

(北京东北师范大学附属中学朝阳学校 北京 100010)

(收稿日期:2017-02-09)

曲线运动是高中学生研究的一种较复杂的运动形式,往往是高考压轴题中运动情境的一部分,因此弄清楚曲线运动的“身世之谜”对初学者来说非常重要。

从名称上来说,运动轨迹为曲线的运动叫曲线运动;从运动性质来说,曲线运动一定是变速运动;从受力特点来说,曲线运动所受合力和速度一定不在一条直线上。

物体为什么会做曲线运动,先来看看物体做直线运动的几种情境,如图1所示。

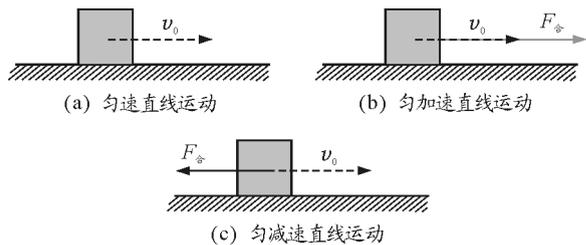


图1

由此可以得出当物体所受合外力和速度不在一条直线上时,物体做曲线运动的推论.下面我们研究一下物体做曲线运动的几种情境所具有的特点,如图2所示。

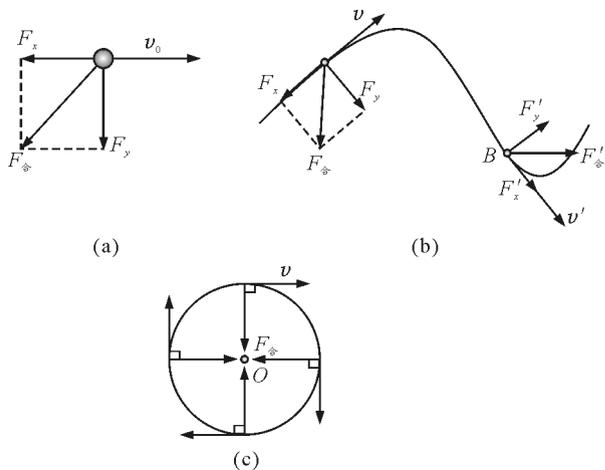
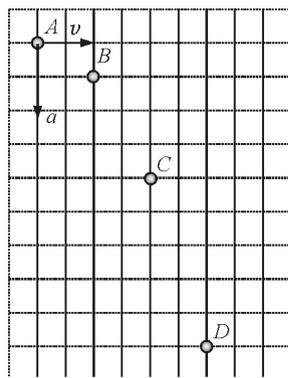


图2 曲线运动分析

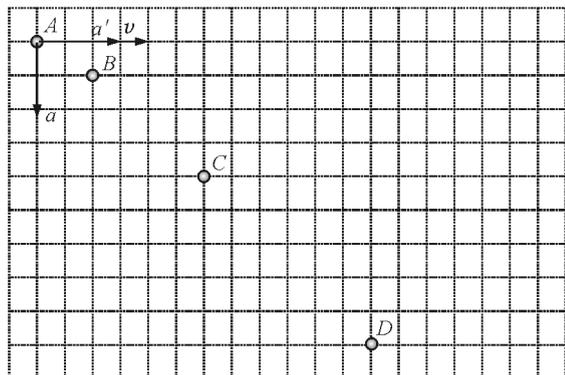
把物体所受合外力 $F_{合}$ 分解成与速度一条直线

上的力 F_x 和与速度垂直的力 F_y . F_x 的作用是只改变速度大小; F_y 的作用是只改变速度的方向. 如图2(a)所示,如果这两个分力在整个运动过程中大小和方向都不变,那么我们就可以把整个曲线运动过程分解为直线运动来处理;反之如图2(b)、(c)所示,如果两个分力大小和方向不断改变我们就不能采用“化曲为直”的方法处理整个运动过程。

那么下面我们就通过描点的方法把两个直线运动进行合成来分析为什么类似图2(a)的情境可以采用化曲为直的方法来处理。



(a) 水平方向匀速直线运动, 竖直方向初速度为零的匀加速直线运动



(b) 水平方向初速度为 v 的匀加速直线运动, 竖直方向初速度为零的匀加速直线运动

图3

下面我们以前抛运动为例体会化曲为直的方法. 平抛运动是初速度水平, 只在重力作用下的一种运动. 这种运动的特点水平方向不受力, 所以水平方

向做匀速直线运动;竖直方向初速度为零,只受重力,所以竖直方向做加速度为 g 的匀加速直线运动.

【例1】1997年6月1日13时19分7秒,柯受良驾驶汽车,成功飞越黄河.从壶口瀑布的山西一侧起飞,历时1.58 s,汽车在黄河壶口瀑布上空划出一条优美的弧线,最终落到了陕西一侧,完成了飞越壮举.让这个儿童节具有了另外的意义.这一飞跃跨越了55 m的距离,他的这一壮举使他获得了“亚洲飞人”美誉.有人测量了一下他当时的汽车从最高点到落地点的时间大约是0.8 s,两点间的水平距离约为30 m,忽略空气阻力,则汽车在最高点时的速度约为多大?最高点与着地点的高度差约为多大?着地点的速度为多大?(重力加速度 g 取 10 m/s^2)



图4 驾车飞越黄河

解析:利用水平方向做匀速直线运动,可以求得最高点的速度大小为

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{30}{0.8} \text{ m/s} = 37.5 \text{ m/s}$$

利用竖直方向做匀加速运动,可以求得最高点和着地点的高度差大小为

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 0.8^2 \text{ m} = 3.2 \text{ m}$$

着地点的速度可以由速度的合成求得

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2} = \sqrt{37.5^2 + 8^2} \text{ m} \approx 38.3 \text{ m/s}$$

由此可见,化曲为直是处理平抛运动的重要方法,它会使复杂的问题简单化.

下面我们以圆周运动来看看如果整个运动过程不能采用化曲为直的情境.

因为圆周运动的独特性,所以我们引入了几个新的概念,如图5所示:线速度、角速度、周期、向心力和向心加速度.

向心加速度

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

向心力

$$F_{\text{向}} = ma = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

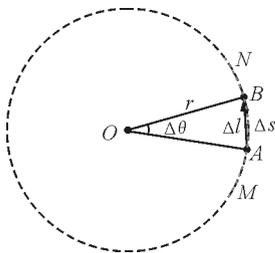


图5 曲线运动的一小段可看成对应的圆弧

如图6所示,对于一般曲线运动来说,某一位置或某一时刻的运动可以看作是以该点所在位置曲率半径为半径的圆运动的一部分.

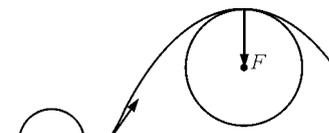


图6 匀速圆周运动合外力指向圆心

运动轨迹为圆的运动,我们把它叫作圆周运动.运动过程中如果速度大小发生变化的圆周运动叫作变速率圆周运动;运动过程中速度大小始终保持不变,我们把这样的圆周运动叫作匀速圆周运动(匀速率的圆周运动).匀速圆周运动的特点是合外力始终指向圆心,因其始终与速度方向垂直,所以其作用是只改变速度的方向.

【例2】如图7所示,把一个质量为 m 的小球放在玻璃漏斗中,晃动几下漏斗,可以使小球沿光滑的漏斗壁在某一水平面内做匀速圆周运动,已知漏斗侧壁与轴线的夹角为 θ . 小球做圆周运动的半径为 r . 求漏斗壁对小球的支持力大小为多少? 小球向心力大小为多大? 小球运动一周所需的时间.

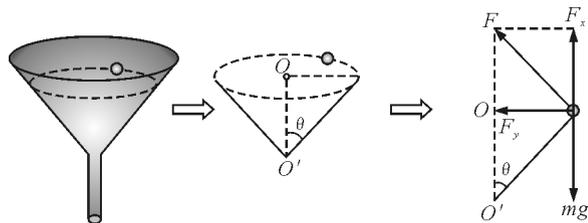


图7 小球在漏斗中做圆周运动及其受力分析

解析:小球受力如图7所示,根据匀速圆周运动特点,可以知道支持力 F 和重力 mg 的合力指向圆周运动的圆心 O ,所以 $F_x = mg$,由此可以得出

$$F = \frac{mg}{\cos \theta}$$

向心力的大小为

$$F_{\text{向}} = F_y = mg \tan \theta$$

利用向心力周期表达式可以得到

$$mg \tan \theta = m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

解得 $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r}{g \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \tan \theta}}$

要做到熟练解决圆周运动的问题,需要掌握好受力分析,在准确分析受力的基础上列出向心力的力学表达式和运动学表达式的等式.这就是圆周运动解决问题的一般方法.

【例3】在2017年的春晚节目《梦想之城》中有一个“八人环球飞车表演”最高时速70 km/h,环球的直径仅为6.5 m.根据你所学的物理知识,来计算一下摩托车和车手速度最大时的向心加速度是多大?如果摩托车最大速度是突然失去动力,请问在忽略摩擦力的情况下摩托车和车手是否能够通过环球的最高点,给出你的判断理由.



图8 八人环球飞车表演

解析:车手和摩托车看作整体质量为 m 的质点,假定可以通过直径为6.5 m球体的最高点,那么车手和摩托车在最高点的受力如图9所示.

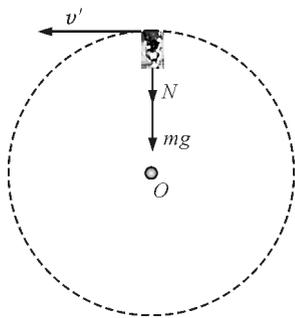


图9 车手连同摩托车受力分析

根据题中条件可以知道,当车速为70 km/h时,那么摩托车和车手的所受向心力大小为

$$F_{\text{向}} = m \frac{v^2}{r}$$

其向心加速度为

$$a_{\text{向}} = \frac{v^2}{r} = \frac{19.4^2}{3.25} \text{ m/s}^2 = 115.8 \text{ m/s}^2$$

如果车速最大时恰好位于环球的最低点,那么从最低点到最高点的过程中,失去动力的摩托车和车手在忽略摩擦力的情况下可以到达环球最高点,这一过程中只有重力做功,根据动能定理可知

$$-mgD = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

那么最高点处根据圆周运动特点可得向心力大小为

$$F'_{\text{向}} = m \frac{v'^2}{r} \approx 75.8m > mg$$

所以可以通过最高点.

对于圆周运动,我们只要能够知道做圆周运动物体的质量,再能观测到线速度、角速度、周期、轨道半径中的任意两个,我们同样可以利用向心力公式计算出它所需要的向心力.

【例4】想知道自己生存的地球的运动特点,小明查阅资料发现地球是在绕太阳做近似圆周运动,地球绕太阳一周的时间大约是365天,太阳和地球之间的距离大约为 1.5×10^8 km.如果把这一圆周运动可以近似地看作是匀速圆周运动.如果他想知道地球做圆周运动所需向心力的大小,他还需要知道哪些物理量?请查阅后代入向心力公式计算出向心力的大小.

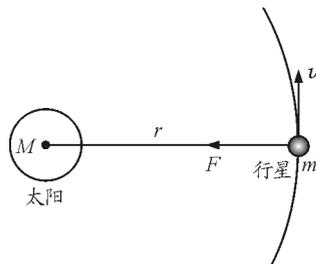


图10 地球绕太阳做圆周运动及受力分析

解析:因为知道地球绕太阳运动的周期 $T=365$ 天,所以根据向心力周期表达式

$$F_{\text{向}} = m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

可以看出还需要知道地球的质量 m .

经查阅资料知道地球的质量 $m \approx 6 \times 10^{24}$ kg

$$F_{\text{向}} = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} =$$

$$6 \times 10^{24} \times \frac{4 \times 9.86 \times 1.5 \times 10^{11}}{31\,536\,000^2} \text{ N} \approx 3.6 \times 10^{23} \text{ N}$$

由此可见,很多时候我们完全可以利用我们学过的知识帮助我们开拓一些未知的知识海洋.