

一个几何引理与抛物型偏转的等效线性不动点*

周国全

(武汉大学物理科学与技术学院 湖北 武汉 430072)

(收稿日期:2017-02-16)

摘要:电子在匀强电场中的电偏转与具有磁矩的原子在非均匀磁场中的运动路径的磁偏转实验——史特恩-盖拉赫(Stern-Gerlach)实验,是两个典型的抛物型偏转实验.本文论述抛物型偏转的等效不动点的存在性及其意义,并推导其统一的偏转公式.

关键词:电偏转 磁偏转 线性不动点 史特恩-盖拉赫实验 偏转公式

普通物理中的电偏转实验与量子、原子物理中的史特恩-盖拉赫(Stern-Gerlach)实验,是物理学不同应用领域的两个性质迥异的实验^[1-4].前者是实现示波器电子扫描的理论基础^[1-2],后者直接验证了原子(分子)的磁矩的空间量子化特性^[3-7],从而也验证了原子(分子)角动量与其内部电子轨道取向的量子化^[3-7].然而,撇开具体的物理背景不论,匀强电场中电子束的偏转与非均匀磁场中原子路径的偏转却具有相似的几何规律.它们都由场内的一段抛物线偏转外加一段切向的直线运动所构成.本文经过对这两个实验进行具体的分析和类比描述,尤其阐述了抛物型偏转的等效线性不动点的存在性,归纳提炼出特有而共同的几何因子,总结出统一的偏转公式.

1 一个几何引理

为方便展开有关抛物型偏转的线性不动点的讨论,先证明如下数学命题以作后文引理.

引理(Lemma):抛物线族 $\{y=kx^2, k \neq 0; k \in R\}$ 中的任何一条抛物线,它与给定直线 $x=x_0$ 的交点处的切线,必经过 x 轴上的定点 $(\frac{x_0}{2}, 0)$,无关于参数 k 的取值大小.我们称此定点为这一抛物线族在点集 $\{(x_0, kx_0^2), k \neq 0; k \in R\}$ 的切线族的等效线性不动点.

证明:如图1所示,对于此抛物线族的任何一

条抛物线上给定横坐标 x_0 的任意一点 $G(x_0, y_0 = kx_0^2)$,该抛物线过 G 点的切线方程为^[8]

$$\frac{y + y_0}{2} = kx_0x \quad (1)$$

$$\text{或} \quad 2kx_0x - y - y_0 = 0 \quad (1')$$

在上式中令 $y=0$,即得该切线与 x 轴的交点的横坐标 x'_0 ,亦即

$$x'_0 = \frac{y_0}{2kx_0} \quad (2)$$

再将 $y_0 = kx_0^2$ 代入上式,可得

$$x'_0 = \frac{x_0}{2} \quad (3)$$

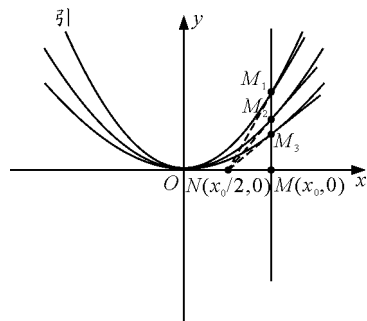


图1 抛物线切线族的不动点

因此交点坐标为 OM 线段的中点 $N(\frac{x_0}{2}, 0)$,为一不动的定点,与参数 k 之取值无关,称为这一抛物线族在点 $M(x_0, y_0 = kx_0^2)$ 的切线族的等效线性不动点.该切线族就如同是从图1中的 OM 线段的中点这一不动点射出的直线束.引理获证.

* 高等学校电动力学课程教学研究项目,项目编号:JZW-16-DD-15

作者简介:周国全(1965-)男,博士,副教授,从事大学物理与理论物理教学工作,非线性可积方程与场论研究.

2 抛物型电偏转的等效不动点与偏转公式

如图2所示,设质量为 m 的某电子经电势差 U 加速至速率 v 之后,从 O 点沿水平方向(取为 x 轴方向)射入两平行导体板 AB 和 CD 之间.两板间距为 d ,长度为 $\overline{AB}=\overline{CD}=l$,并加有偏转电压 U_y .建立如图2所示的坐标系 xOy ,在 x 轴上 F 点处有一垂直接收屏,设 $BE \perp x$ 轴于 E 点, $\overline{OE}=l$,并设 $\overline{EF}=L$,两板间具有匀强电场,沿 y 轴反方向,大小为 $E=\frac{U_y}{d}$,电子在两板间受恒力 $F=eE$ 作用,加速度为 $a=\frac{eE}{m}$,其运动方程为

$$x(t) = vt \quad y(t) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \quad (4)$$

其中入射初速率 v 满足

$$eU = \frac{mv^2}{2} \quad (5)$$

由式(4)、(5)可得该电子的抛物线运动方程为

$$y = \frac{eE}{2mv^2} x^2 = \frac{U_y}{4Ud} x^2 \equiv kx^2 \quad (6)$$

相应的参数 k 为

$$k = \frac{eE}{2mv^2} = \frac{U_y}{4Ud} \quad (7)$$

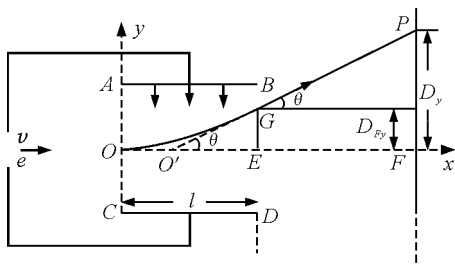


图2 电偏转的等效线性不动点

忽略边缘效应,电子在此抛物线与 BE 线段的交点 G 处射出场外,在不受外力(并忽略重力)作用的情况下,沿抛物线上 G 点的切线方向直线运动至接收屏上的 P 点.根据前述几何引理,由于 \widehat{OG} 为一段以 O 为顶点的抛物线,因此无论参数 k 的取值如何,其切线 PG 的延长线必交 x 轴于 OE 的中点 O' ,即 $\overline{OO'}=\overline{O'E}=\frac{l}{2}$.于是可得如下结论:在满足电子出射的约束条件的情况下,无论加速电压 U ,入射速度 v ,偏转电压 U_y ,场强 E 如何取定,也不论平行板的间距 d 如何取值,电子束出射线的反向延长线必通过平行板的中心 O' ($O'E$ 的中点),就如同是从

O' 点出发的射线直线运行至 P 点一样. O' 点就是抛物型电偏转的等效线性不动点.

设 θ 为切线 GP 与 x 轴的夹角,即 $\angle PO'F = \angle GO'E = \theta$,又 $\overline{O'F} = \frac{l}{2} + L$,则屏上 P 点的偏转距离 D_y 为 $D_y = \left(\frac{l}{2} + L\right) \tan \theta$;因 $\tan \theta$ 为切线 GP 的斜率,则有 $\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = \frac{U_y}{2Ud} l$.因此

$$D_y = \left(\frac{l}{2} + L\right) \frac{U_y}{2Ud} l \quad (8)$$

或

$$D_y = k[(l+L)^2 - L^2] = k[\overline{OF}^2 - \overline{EF}^2] \quad (9)$$

其中, $\overline{OF}^2 - \overline{EF}^2 = (l+L)^2 - L^2$ 是空间几何因子.出射点 G 的偏转距离为

$$D_{Gy} = y_G = \frac{l}{2} \tan \theta = \frac{U_y l^2}{4Ud} = kl^2 \quad (10)$$

以上偏转公式(8)、(9)在忽略场的边缘效应的情况下严格成立,不必强调“偏转板到荧光屏的距离远大于偏转板长度”而置该公式于“近似”的地位.此外,为了实现电偏转还必须满足出射约束条件

$$|D_{Gy}| = |y_G| \leq \overline{BE} = \frac{d}{2}$$

即 $|k|l^2 \leq \frac{d}{2}$,亦即

$$\left| \frac{U_y}{U} \right| \leq 2 \left(\frac{d}{l} \right)^2 \quad \text{或} \quad \frac{d}{l} \geq \sqrt{\frac{|U_y|}{2U}} \quad (11)$$

3 抛物型磁偏转的等效线性不动点——史特恩-盖拉赫实验

如图3所示,史特恩-盖拉赫实验是在非均匀横向磁场中发生原子路径的横向偏转,它是抛物型偏转的又一典型实例,历史上被用来证实原子轨道取向及角动量、磁矩的量子化规律.

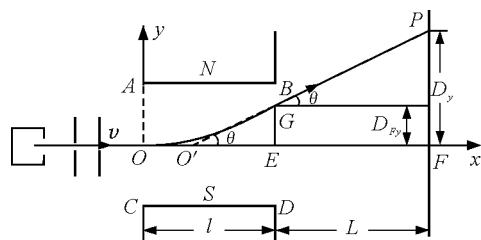


图3 史特恩-盖拉赫实验的等效线性不动点

设质量为 M , 带有磁矩 μ 的原子 (例如银原子) 从原子炉中以速率 v 沿 x 轴水平射出, 经准直装置从 O 点入射到非均匀横向磁场 B 中. 设 B 在不大的区域内沿 y 方向均匀变化, 并设梯度为 $\frac{dB}{dy}$, 则该原子在此横向非均匀磁场中受到 y 方向均匀恒力 F_y , 不妨假设 F_y 方向沿 y 轴正向, 其大小为^[3~7]

$$F_y = \nabla(\mu B) = \mu \nabla B = \mu_y \frac{dB}{dy} \quad (12)$$

其中, μ_y 为磁矩 μ 在 y 方向的投影分量. 再设 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{OE} = l, \overline{EF} = L$, 于是原子在磁场区域做如下抛物线运动

$$x = vt \quad y = \frac{1}{2} \frac{F_y}{M} t^2 = \frac{\mu_y}{2M} \frac{dB}{dy} t^2 \quad (13)$$

抛物线运动方程为

$$y = \frac{\mu_y}{2Mv^2} \frac{dB}{dy} x^2 \equiv kx^2 \quad (14)$$

其抛物线参数 k 为

$$k = \frac{\mu_y}{2Mv^2} \frac{dB}{dy} \quad (15)$$

忽略非均匀磁场区域的边缘效应, 原子在 G 点出射后沿切线方向直线运动至感光板上 P 点, G 为切点 (即出射点), 根据前述几何引理, 不论该抛物线的各参数 $\mu_y, \frac{dB}{dy}, M, v$ 及磁场的深度与宽度如何取定, 必然有如下结论: PG 的延长线必交 X 轴于 OE 的中点 O' 处, 就好像原子 (束) 是从磁场的中心 O' 直线射出一样, 即 $\overline{OO'} = \overline{O'E} = \frac{l}{2}$; 如果 μ_y 是量子化的 (可正可负), 则 P 点落在感光板上的位置是间隔的 (可上可下), 但是 O' 的位置却是不变的. 我们称 O' 点为这一抛物型偏转的等效线性不动点, 感光板上 P 点的偏转距离为 $D_y = \overline{O'F} \tan \theta = \left(\frac{l}{2} + L\right) \tan \theta$;

其中, $\tan \theta$ 为抛物线在 G 点的切线的斜率, $\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = \frac{\mu_y}{Mv^2} \frac{dB}{dy} l = 2kl$, 因此

$$D_y = 2kl \left(\frac{l}{2} + L\right) =$$

$$k[(l+L)^2 - L^2] = k[\overline{OF}^2 - \overline{EF}^2] \quad (16)$$

注意上式也具有空间几何因子

$$(l+L)^2 - L^2 = \overline{OF}^2 - \overline{EF}^2$$

为保证原子在 G 点出射, G 点的偏转距离 D_{Gy} 必须满足约束条件

$$|D_{Gy}| = |y_G| \leq \frac{d}{2}$$

即

$$|y_G| = |k|x^2|_{x=l} = |k|l^2 = \frac{1}{Mv^2} \left| \mu_y \frac{dB}{dy} \right| l^2 \leq \frac{d}{2}$$

$$\text{或} \quad \frac{d}{l^2} \geq 2|k| = \frac{1}{Mv^2} \left| \mu_y \frac{dB}{dy} \right| \quad (17)$$

4 统一的偏转公式

综上所述, 无论是电子束在匀强电场的电偏转实验, 还是原子束在非均匀横向磁场中的史特恩-盖拉赫实验, 粒子在场域内做一段抛物线运动, 在场域外做直线运动, 其出射线的反向延长线必通过其初始入射方向的延长线在场域部分的中点, 就如同是从场域中点发出的射线一样, 我们称之为抛物型偏转的等效线性不动点. 它的存在使问题的处理变得相当简便. 另一方面, 由于两类抛物型偏转具有相同的空间几何因子, 因此它们的偏转公式 (9)、(16) 具有相似而统一的形式

$$D_y = k[\overline{OF}^2 - \overline{EF}^2] = k[(l+L)^2 - L^2] \quad (18)$$

$$\text{其中} \quad k = \begin{cases} \frac{eE}{2mv^2} = \frac{U_y}{4Ud} & (\text{电偏转实验}) \\ \frac{\mu_y}{2Mv^2} \frac{dB}{dy} & (\text{史特恩-盖拉赫实验}). \end{cases} \quad (19)$$

无论参数及 k 如何取值, 亦即无论 U_y, U, d, m ; 或 $\frac{dB}{dy}, \mu_y, \cos \beta, M$, 尤其是 v 的取值如何, 均不会改变等效线性不动点的位置, 但能影响出射点 G 的位置 (纵坐标) 及倾角 θ 的大小, 从而影响射线的斜率. 以上结论还必须受如下约束条件的限制:

(1) 忽略场的边缘效应;

(2) $|D_{Gy}| \leq \frac{d}{2}$, 或 $|k| \leq \frac{d}{2l^2}$, 即

式 (11) 与式 (17), 亦即

$$\begin{cases} \left| \frac{U_y}{U} \right| \leq 2 \left(\frac{d}{l} \right)^2 & (\text{电偏转实验}) \\ \left| \frac{1}{Mv^2} \mu_y \frac{dB}{dy} \right| \leq \frac{d}{l^2} & (\text{史特恩-盖拉赫实验}) \end{cases} \quad (20)$$

参考文献

- 1 林抒, 龚镇雄. 普通物理实验. 北京: 人民教育出版社, 1981. 328 ~ 332
- 2 周殿清. 普通物理实验教程. 武汉: 武汉大学出版社, 2005. 98 ~ 104
- 3 褚圣麟. 原子物理学. 北京: 高等教育出版社, 1979. 42 ~ 61
- 4 H·哈肯, H·C·沃尔夫, 著. 原子与量子物理学. 刘歧元, 译. 北京: 科学出版社, 1993. 241 ~ 243
- 5 郭奕玲. 斯特恩-盖拉赫实验, 大学物理, 1984, 3(10): 27 ~ 30
- 6 宁长春, 汪亚平, 胡海冰, 等. 斯特恩-盖拉赫实验历史概述. 大学物理, 2016, 35(3): 43 ~ 49
- 7 吴榕生. 斯特恩-盖拉赫实验中原子受力的分析. 大学物理, 1986(2): 5 ~ 7
- 8 郭大钧. 大学数学手册. 济南: 山东科学技术出版社, 1985. 70 ~ 73

A Geometric Lemma and the Equivalent Linear Fixed Point of Parabolic Deflection

Zhou Guoquan

(School of Physics and Technology, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072)

Abstract: The existence and specific properties of the equivalent linear fixed points, for the parabolic deflection about the moving path of a point charge in a uniform electric field, and an atom with magnetic moment in a non-uniform magnetic field, were thrown light on, and a unified deflection formula was also deduced.

Key words: parabola; electric deflection; magnetic deflection; fixed point; Stern - Gerlach experiment; deflection formula

(上接第 19 页)

- 2 刘建一, 王旒菡, 李思嘉, 等. 多能功偏振光演示仪在教学中的应用. 物理实验, 2014, 34(10): 41 ~ 44
- 3 秦双华. OTDR 测试原理与常见测试曲线简析. 有线电视技术, 2012(3): 110 ~ 113
- 4 胡玉禧. 应用光学(第 2 版). 合肥: 中国科技大学出版社, 2009. 222 ~ 223
- 5 赵书涛, 武晓东, 王策, 等. 流式细胞仪的原理、应用及最新进展. 现代生物医学进展, 2011, 11(22): 4 378 ~ 4 381

Strengthening the Connection of Optical Teaching and the Modern Engineering Application

Mao Hongmin Wang Xiaodan Zang Taocheng

(Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215009)

Abstract: In order to realize the goal of cultivating innovative talents in higher education, the optical reflection and refraction theories are analyzed in modern engineering applications, such as optical fiber communication, intelligent products and biological detection, etc. These concrete cases show that the basic theory is used in multiple industries. These examples enable the students recognize the importance of the basic theory, and promote the students to analyze and solve problems with the theory knowledge. So it is achieved to cultivate students' innovation ability and arouse their entrepreneurial spirit.

Key words: college physics teaching; optical theory; engineering application