平抛运动平均速度等于该时间段中间时刻瞬时速度吗?

王智荣
(山西省实验中学　山西 太原　030031)

(收稿日期:2017－03－01)

摘　要:证明了平抛运动与匀变速直线运动一样满足,一段时间的平均速度等于这段时间中间时刻的瞬时速度,并举例说明用该结论解题的便捷性.

关键词:平抛运动　平均速度　中间时刻瞬时速度

1　问题的提出

从人教版《物理·必修 2》第一章起,学生开始认识曲线运动.其中平抛运动是一种非常特殊的曲线运动,它的加速度是重力加速度,保持不变,所以从运动性质上来讲属于匀变速的曲线运动.既然同为匀变速运动,那么会不会和必修 1 中的匀变速直线运动类似,有些运动学公式可以通用呢?对于匀变速直线运动,某段时间的平均速度等于这段时间中间时刻的瞬时速度,即$\bar{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}_{\frac{t}{2}}$,那么对于平抛运动这个式子依然成立吗?答案是肯定的.

2　问题分析

2.1　大小相等的证明

先做一个简单的证明.既然划等号意味着不仅大小上两者相等,方向上平均速度的方向也应该和中间时刻速度的方向相同.图 1 所示是平抛运动的一段轨迹,物体从 O 点以初速度 v_0 抛出,经过一段时间 t 运动到了 P 点,设中间时刻的水平速度为 v_x,竖直速度为 v_y,先证明两者等大.

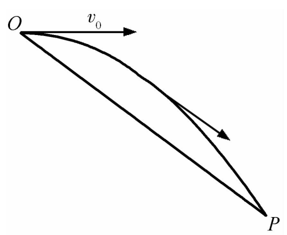

图 1　物体平抛运动 t 时间的轨迹图

物体在时间 t 内的水平位移

$$x=v_0t$$

竖直位移

$$y=\frac{1}{2}gt^2$$

合位移

$$l_{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(v_0t)^2+\left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2}=t\sqrt{v_0^2+\left(\frac{1}{2}gt\right)^2}$$

则平均速度

$$\bar{v}=\frac{l_{OP}}{t}=\sqrt{v_0^2+\left(\frac{1}{2}gt\right)^2}$$

又因为中间时刻速度

$$v_{\frac{t}{2}}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+\left(\frac{1}{2}gt\right)^2}$$

所以很明显大小上

$$\bar{v}=v_{\frac{t}{2}}$$

2.2　方向相同的证明

我们知道,根据平均速度的定义式,平均速度的方向和位移方向同向,所以只要我们能够证明位移的方向和中间时刻速度同向,即说明平均速度方向与中间时刻速度同向.同图1,增设这段时间位移 l_{OP} 与水平方向成角度 α,中间时刻速度 $v_{\frac{t}{2}}$ 与水平方向成角度 β,则有

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0t}=\frac{\frac{1}{2}gt}{v_0}$$

$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{1}{2}gt}{v_0}$$

所以 $\tan\alpha = \tan\beta$，即 $\alpha = \beta$. 可见方向也相同.

3　例题分析

综上，对于平抛运动 $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_{\frac{t}{2}}$ 依然成立.

有了这个结论对于有些问题就可以快速得到答案，如下面的例 1 和例 2.

【例 1】 如图 2 所示，在倾角为 θ 的斜面顶端 A 处以初速度 v_0 水平抛出一小球，落在斜面上的某一点 B 处，设空气阻力不计，求：

(1) 小球从 A 运动到 B 处所需的时间；

(2) 从抛出开始计时，经过多长时间小球离斜面的距离达到最大.

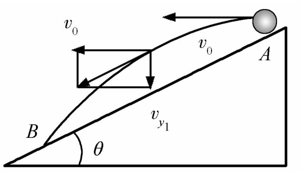

图 2　例 1 题图

解析：(1) 由图易知，位移方向与水平方向的夹角即为斜面倾角 θ，则

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0 t}$$

可得

$$t = \frac{2v_0\tan\theta}{g}$$

(2) 由图易知，距离斜面最远时速度方向与斜面平行，即与从 A 到 B 全过程的位移方向平行(同向). 根据 $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_{\frac{t}{2}}$，此时的速度一定是全程的平均速度，所以从抛出到距离最远所用时间是全程总时间的一半，即在第(1)问的基础上除以 2，即第(2)问的答案. 如此可能比传统解法要快一些.

【例 2】 一位同学在“研究平抛物体的运动”实验中，只画出了如图 3 所示的一部分曲线轨迹，于是他在轨迹上取了水平距离 Δs 相等的 3 点 A，B，C，量得 $\Delta s = 0.2$ m. 又量出它们之间的竖直距离分别为 $h_1 = 0.1$ m，$h_2 = 0.2$ m，利用这些数据求解：

(1) 物体抛出时的初速度 v_0；

(2) 物体经过 B 时的速度 v_B.

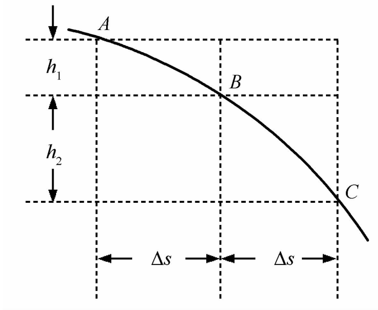

图 3　例 2 题图

解析：(1) 因为 AB 和 BC 段水平距离相等，则从 A 到 B 和从 B 到 C 所用时间相等，设为 T，则有

$$\Delta s = v_0 T \qquad (1)$$

$$h_2 - h_1 = gT^2 \qquad (2)$$

由式(2) 解出 T，代入式(1)，即可得到 v_0.

(2) 对于这一问传统的解法是在第(1)问 v_0 和 T 得到的基础上，先求出 B 点此时的竖直速度

$$v_y = \frac{h_1 + h_2}{2T}$$

再根据勾股定理得到 B 点的合速度为

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$$

运算量相对要大.

其实，B 点很明显是全程中间时刻所对应的位置，求 B 点速度即求中间时刻的速度，根据公式 $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_{\frac{t}{2}}$ 我们可以转化为求全程的平均速度，而平均速度等于位移除以时间，全程位移即斜边 AC 段的长度，满足勾股数，易得 AC 段长等于 0.5 m，再除以从 A 到 B 全程总时间 $2T$，即为答案. 运算量大大减小，甚至口算即可得到.

4　结束语

类比迁移是物理学重要的思想方法之一，通过这样的引导训练，不仅有利于学生更好地理解新的知识，还可以拓展他们的思路，启迪他们的智慧，我们何乐而不为呢？