



杆环共同约束下小球的运动规律探析

陈玺君

(江苏省丹阳市吕叔湘中学 江苏 镇江 212300)

(广西师范大学物理科学与技术学院 广西 桂林 541004)

(收稿日期:2017-04-11)

摘要:通过一道杆、环共同约束下小球运动题目,研究了小球的动能、速度、加速度、轻杆作用力的规律,为解这类模型题目提供一个理论指导,优化高三复习课解题的策略,提高了物理解题高效课堂教学效果。

关键词:轻杆 环 共同约束 定量分析 规律

1 引言

在高三复习课教学中,笔者常常遇到这样一类较难的杆、环共同约束下的小球运动问题:

【例题】(单选)用一长度为 $\sqrt{2}R$ 的轻杆两端连接质量均为 m 的小球 a, b ,小球 a, b 穿在光滑的竖直固定圆环上,圆环半径为 R ,初始位置如图1所示, a 在圆环水平直径的左端, b 在圆环的最低点,现释放两小球 a, b 使它们由静止开始沿圆环向下运动(已知重力加速度为 g),下列说法中错误的是()

- A. 小球 a 运动过程中的最大速度为 $v_m = \sqrt{(\sqrt{2}-1)gR}$
- B. 小球 a 从静止开始运动至最大速度过程中,轻杆对小球 b 所做的功为 $\frac{\sqrt{2}}{2}mgR$
- C. 小球 a 从静止开始运动至圆环最低点过程中,其加速度大小始终不大于 $\frac{1}{2}g$
- D. 小球 a 从静止运动至圆环最低点过程中,轻杆对小球 a 先做负功后做正功

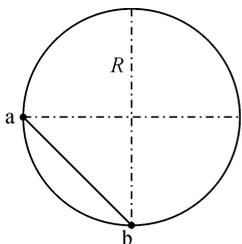


图1 例题题图

2 题目评价

(1)全方位考察了学生对力学综合知识的掌握和应用

通过对以上题目的分析可知,该题综合性很强,涉及到了功能关系,运动和力之间的关系,机械能守恒定律等重要力学知识点.要求学生对于以上知识点的概念、规律理解深刻,运用熟练,若作为选择题的最后一题具有很好的区分度。

(2)能体现出编者对高考关于能力考察要求的深刻理解和应用

该题充分体现了高考模拟考试对于考生的理解能力、逻辑推理能力、综合分析能力、应用数学处理物理的计算能力的考察,目标向高考看齐.选项中从定性、定量、最值、排除法4个纬度来设置疑问,需要学生具备全面的物理知识和严谨的分析能力,对学生的能力要求极高,应该说是一道好题。

(3)似乎有超纲嫌疑

连接体问题是高考乃至各地模拟试题都喜欢挖掘的题材,越来越多的被各地高考命题组专家、模拟试题命题小组所青睐,然而本题有些选项似乎难度较大,应该是一道大学理论力学试题,有超纲嫌疑,尤其是小球加速度的大小问题是用到杆、环约束关系,甚至达到了竞赛的层次要求。

3 学生解题中的合理思维

对于学生解这道题,合乎高中物理解题的思维应该是:由于两小球 a, b 质量相等,根据小球 a, b 组

成的系统由机械能守恒定律可知,当小球 a 运动到最低点时,小球 b 已到达圆环水平直径最右端与小球 a 初始等高的位置,因此,当小球 a 运动到最低点时速度为零,且运动过程中任意时刻由于杆的约束关系,小球 a, b 的速度大小均相等,则小球 a 的速度变化规律必是从零先增大后减小至零. 最大速度可能出现在 \widehat{ab} 的中点位置,然后列系统的机械能守恒定律方程求解其最大值, A 正确. 对小球 b 列动能定理方程就可求出轻杆对小球 b 所做的功, B 也正确. 由于小球 a 一直沿圆弧向下运动, 小球 b 一直沿圆弧向上运动, 因此轻杆对小球 b 可能一直做正功而对小球 a 一直做负功, D 错误, 可选 D. 至于 C 选项, 很难运用高中知识处理, 由于题目是单选, 因此错误的只能是 D.

由于学生对 D 选项的考虑理由也不够充分, 带有猜测的成分, 另外 C 选项又不能使用高中物理知识处理, 因为是排除法, 所以弱化了对 C 选项小球 a 加速度的考查, 使得这道题目美中不足, 留下缺憾.

为此, 笔者从大学理论力学的角度和仿真物理实验两个手段结合给出定量分析.

4 理论定量分析

4.1 速度、动能定量分析

在小球 a, b 运动的任意时刻, v_a, v_b 与轻杆(或延长线)的夹角均为 45° , 由于轻杆不可伸长, 故小球 a, b 沿杆方向速度相同.

故

$$v_a \cos 45^\circ = v_b \sin 45^\circ \quad (1)$$

即

$$v_a = v_b \quad (2)$$

如图 2 所示, 设小球 a 运动位置与圆心的连线与水平半径的夹角为 θ .

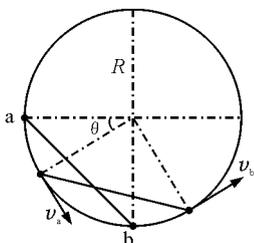


图 2 小球 a 运动中

对小球 a, b 与轻杆组成的系统, 由系统的机械能守恒定律得

$$mgR \sin \theta - mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}mv_b^2 \quad (3)$$

由式(2)、(3)得

$$E_{ka} = E_{kb} = \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 = \frac{1}{2}mgR(\sin \theta + \cos \theta - 1) \quad (4)$$

取 $g = 10 \text{ m/s}^2, m = 1 \text{ kg}, R = 20 \text{ m}$. 代入式(4)得

$$E_{ka} = E_{kb} = \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 = 100(\sin \theta + \cos \theta - 1) = 100\left[\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (5)$$

显然 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], E_{ka}, E_{kb}$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 有最大动能, 且

$$E_{ka} = E_{kb} = \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 = 100(\sqrt{2} - 1) \text{ J} \approx 41.42 \text{ J} \quad (6)$$

作图如图 3 所示.

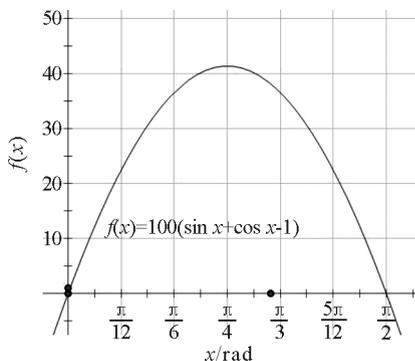


图 3 $f(x)$ 图像 1

从图像也可以看出, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], E_{ka}, E_{kb}$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 有最大动能, 且小球 a, b 的动能变化规律为先增大后减小至零. 与理论推导十分吻合. 由式(4)可得

$$v_a^2 = v_b^2 = gR(\sin \theta + \cos \theta - 1) \quad (7)$$

即

$$v_a = v_b = \sqrt{gR(\sin \theta + \cos \theta - 1)} \quad (8)$$

代入数据得

$$v_a = v_b = 10\sqrt{2(\sin \theta + \cos \theta - 1)} = 10\sqrt{2\left[\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (9)$$

作图如图4所示.

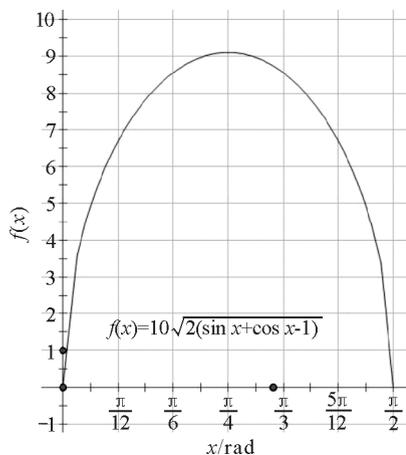


图4 $f(x)$ 图像2

同理易知, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时 v_a, v_b 有最大速度, 且小球 a, b 的速度变化规律为先增大后减小至零. 将 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代入式(9), 得

$$v_{a\max} = v_{b\max} = 10\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} \text{ m/s} \approx 9.1 \text{ m/s} \quad (10)$$

与图4十分吻合.

利用“仿真物理实验”作出小球速度大小随时间的变化规律图像, 如图5和图6所示.

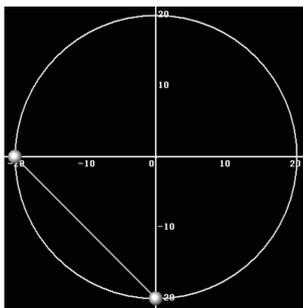


图5 仿真物理实验

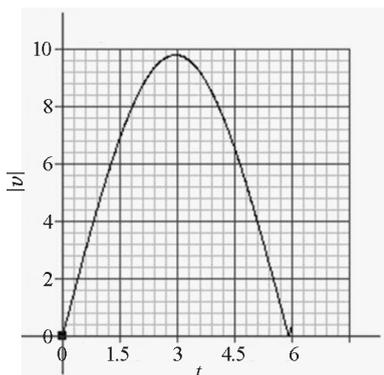


图6 $|v| - t$ 图

理论与实验结果一致.

4.2 加速度定量分析

4.2.1 切向加速度定量分析

式(7)对时间求导得

$$\frac{d(v_a^2)}{dt} = gR(\cos \theta - \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (11)$$

整理可得

$$2v_a a_a = gR(\cos \theta - \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (12)$$

$$\text{又} \quad v_a = R \frac{d\theta}{dt} \quad (13)$$

由式(12)、(13)可得小球 a 的切向加速度

$$a_a = \frac{1}{2}(\cos \theta - \sin \theta)g \quad (14)$$

代入数据得

$$a_a = 5(\cos \theta - \sin \theta) \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (15)$$

作图:

若以运动小球 a 所在位置的圆弧切线方向为 x 轴, 以运动小球 a 所在位置的圆弧半径方向为 y 轴建立平面直角坐标系, 由图7可知: 小球 a 的切向加速度先减小后反向增大, 切向加速度的方向在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 沿 x 轴正方向, 说明小球 a 重力沿切线方向的分力大于杆沿切线方向的分力, 小球 a, b 做加速运动, 速度变大; 在 $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 沿 x 轴负方向, 说明小球 a 重力沿切线方向的分力小于杆沿切线方向的分力, 小球 a, b 做减速运动, 速度变小, 且小球 a 的切向加速度的极大值为 5 m/s^2 , 分别出现在出发点和圆环的最低点, 呈现周期性规律变化; 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 切向加速度 $a_a = 0$.

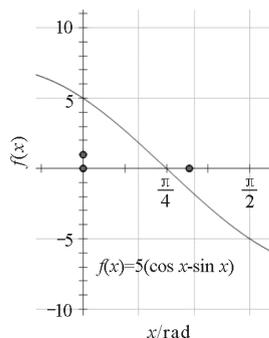


图7 $f(x)$ 图像3

4.2.2 向心加速度定量分析

由式(8)可知

$$a_n = \frac{v_a^2}{R} = \frac{v_b^2}{R} = (\sin \theta + \cos \theta - 1)g \quad (16)$$

代入数据得

$$a_n = 10(\sin \theta + \cos \theta - 1) = 10\left[\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (17)$$

作图如图8所示.

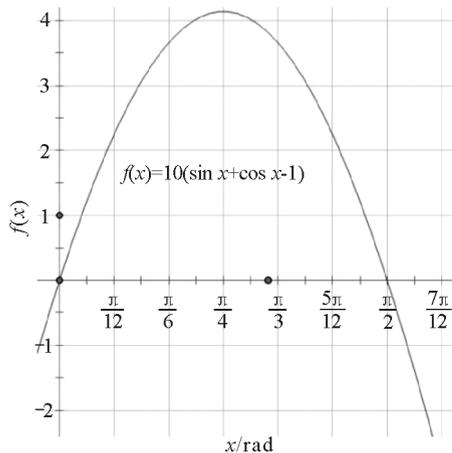


图8 $f(x)$ 图像4

由图8可以看出, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时 a_n 有最大值, 对式(17), 也可求得 a_n 的最大值.

将 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代入式(17)得 $a_{n\max} = 10(\sqrt{2} - 1) \text{ m/s}^2 \approx$

4.14 m/s^2 , 与图像吻合.

4.2.3 小球合加速度定量分析

任意时刻小球 a 的合加速度为

$$a_{a\text{合}} = \sqrt{a_a^2 + a_n^2} =$$

$$\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\cos \theta - \sin \theta)g\right]^2 + [(\sin \theta + \cos \theta - 1)g]^2} \quad (18)$$

代入数据得

$$a_{a\text{合}} = 10\sqrt{0.25(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta - 1)^2} \quad (19)$$

令

$$\frac{d[0.25(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta - 1)^2]}{d\theta} = 0 \quad (20)$$

即

$$\frac{1}{2}(\cos \theta - \sin \theta)(-\sin \theta - \cos \theta) +$$

$$2(\sin \theta + \cos \theta - 1)(\cos \theta - \sin \theta) = 0 \quad (21)$$

整理可得

$$(\cos \theta - \sin \theta)\left[\frac{3}{2}(\sin \theta + \cos \theta) - 2\right] = 0 \quad (22)$$

在 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内, 方程(22)的解为

$$\cos \theta - \sin \theta = 0 \quad (23)$$

$$\begin{cases} \cos \theta - \sin \theta = 0 \\ \sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (24)$$

式(23)可得

$$\tan \theta_1 = 1 \quad (25)$$

式(24)可得

$$\begin{cases} \sin \theta_2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \\ \cos \theta_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \sin \theta_3 = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \\ \cos \theta_3 = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \end{cases} \quad (27)$$

即

$$\tan \theta_2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \quad (28)$$

$$\tan \theta_3 = \frac{4 + \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} \quad (29)$$

因此可得结论.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ (加速度极大值)} \quad (30)$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}\right) \text{ (加速度极小值)} \quad (31)$$

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}\right) \text{ (加速度极小值)} \quad (32)$$

作小球 a 的合加速度图, 如图9所示.

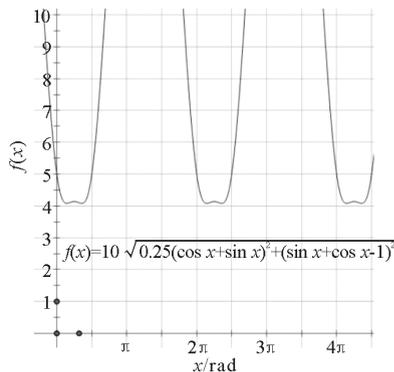


图9 小球 a 的合加速度图像

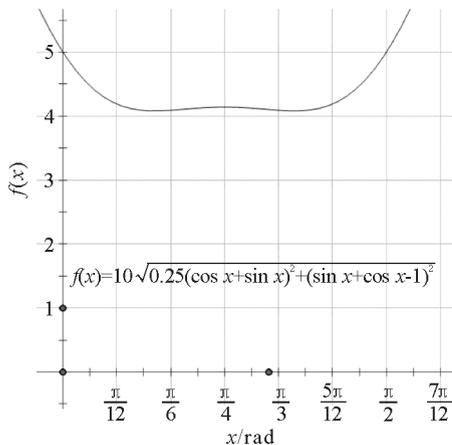


图10 图9的精细放大图

由图9、图10可以看出在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 小球的

合加速度最大值为 5 m/s^2 有两处, $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$.

另外在 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ 处合加速度极大值, 在 $\theta_2 = \arctan\left(\frac{9-4\sqrt{2}}{7}\right), \theta_3 = \arctan\left(\frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right)$ 两处合加速度有极小值, 且合加速度两个极小值大小相等.

利用“仿真物理实验”输出加速度的大小随时间变化的图像, 如图11所示.

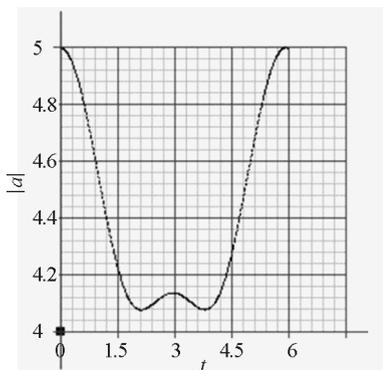


图11 |a|-t图

理论与实验很吻合.

小球a的合加速度最大值的的确为 5 m/s^2 , 不超过 $\frac{g}{2}$, 分别出现在一开始运动的位置和圆环的最低点位置, 且随 θ 或时间 t 呈现出类似“w”形状的周期性变化规律, 实际上小球的加速度应由切向加速度和向心加速度中较大者控制.

4.3 轻杆受作用力定量分析

如图12所示, 小球a切线方向动力学方程为

$$mg \cos \theta - F \cos 45^\circ = ma_a \quad (33)$$

由式(14)、(33)整理可得

$$F = \frac{mg}{\sqrt{2}} (\sin \theta + \cos \theta) \quad (34)$$

代入数据得

$$F = 5\sqrt{2} (\sin \theta + \cos \theta) = 10 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (35)$$

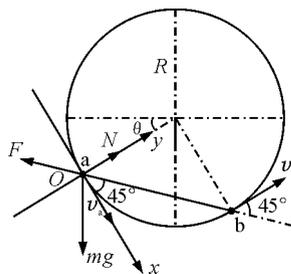


图12 小球运动及受力情况

作图如图13所示.

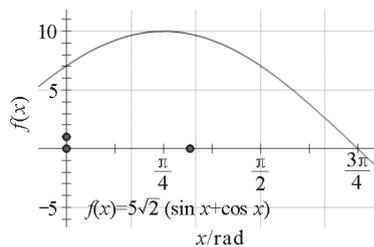


图13 f(x)图像5

由图13可知, 轻杆受到的作用力在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 先增大后减小, 但从未改变过方向, 一直沿 x 轴负方向, 说明轻杆对小球a一直做负功; 最大值在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时取得 $F_{\max} = 10 \text{ N}$.

实际上小球b的速度、动能、加速度、轻杆对其作用力变化规律与小球a一模一样.

5 结束语

杆、环共同约束下小球的运动对高中物理来说较难分析其运动规律, 笔者认为, 如果教师能够钻研该运动模型, 熟知其中的理论力学规律, 在高中物理知识能够处理的范围内带着规律结果对学生进行定性和适当定量计算方面的指导, 培养学生的定性分析能力和逻辑推理能力, 对于提高高效物理课堂教学是行之有效的; 当然, 有兴趣的读者也可以设两小球的质量不相等, 释放点也可以从圆环最高点或其他位置释放, 杆的长度可以调节等角度去研究, 相信可以得到很多有意思的规律.

参考文献

1 周衍柏. 理论力学教程(第2版). 北京: 高等教育出版社, 1985