

三维空间凸透镜成像坐标定位法

刘凯伦

(山东省青岛第二中学 山东 青岛 266061)

(收稿日期:2017-04-12)

摘要:通过深入探究空间点和线段的凸透镜成像规律,概括总结创建出一新的成像方法“凸透镜成像坐标定位法”.突破解决了传统几何光学“透镜成像作图法”所无法解决的一些难题,可精确定位每一像点在坐标系中的位置以及物体凸透镜成像的形状,画出三维空间物体跨越焦平面时的立体发散图像.举例阐明了“凸透镜成像坐标定位法”的作图要点及注意事项.

关键词:凸透镜成像作图法 坐标定位法 坐标定位数据表

在几何光学的学习中,当使用“透镜成像作图法”作图时,往往会碰到两类问题无法解决:

一是,物点的两条特征光线接近平行时,无法确定像点的准确位置,图像严重变形;

二是,构成物体的某一线段接近或跨越焦平面时,无法画出它的光路图,得不到物像.

我们的目的就是要找出凸透镜成像更为有效的方法,解决上述难题.

1 建立凸透镜成像的数学模型

1.1 空间点的凸透镜成像坐标定位

首先,假设透镜为理想透镜.建立直角坐标系,如图1所示,把透镜光心置于坐标原点 O ,光轴与 OX 轴重合.设透镜焦距为 f ,物点 S_0 的坐标为 (X_0, Y_0) , X_0 的范围从负无穷到零;其像点 S'_0 的坐标为 (X, Y) .

- 24 Roman Vinokur, Wieland Associates. Acoustic Noise as a Non - Lethal Weapon. Sound And Vibration, 2004. 19 ~ 23
- 25 Yukio Takahashi, Yoshiharu Yonekawa, Kazuo Kanada et al. An Infrasound Experiment System for Industrial

- Hygiene. Industrial Health, 1997(35):480
- 26 张江华,谭乃银,何焰蓝.基于超声波的次声波产生方法.四川兵工学报,2008,29(6):136 ~ 138
- 27 荣左超.次声活塞发声机理及相关技术研究:[硕士学位论文].杭州:浙江大学,2013

Physics Properties of Infrasonic Waves and Its Applications

Zhang Jin ming Pang Junru Li Chunyan

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083)

Abstract: We organized the infrasound propagation in different medium physical properties; combining with the relevant research results in recent years was analyzed. In addition, the generation of the infrasound source, its application in the field of infrasound monitoring were reviewed, the variety of ways to produce infrasound. This article comprehensively depicts the true picture on physical properties of infrasound, to guide people to recognize sound very meaningful objective and rational attitude.

Key words: infrasound waves; the generation of Infrasound; infrasound source; infrasound monitoring

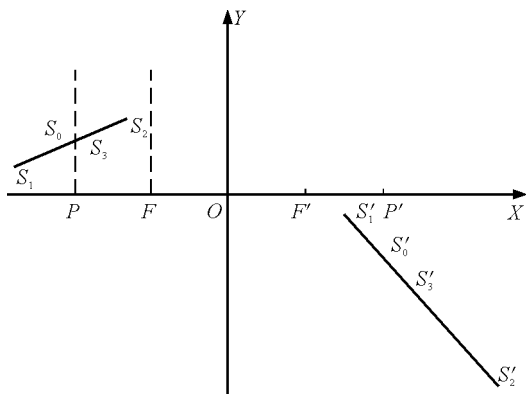


图1 没跨越焦平面线段的凸透镜成像

讨论通过 S_0 的两条特征光线:

由通过光心光线的基本性质,得

$$Y = \frac{Y_0 X}{X_0} \quad (1)$$

由平行于光轴光线的基本性质,得

$$Y = -\frac{Y_0 X}{f} + Y_0 \quad (2)$$

式中 f 为透镜的焦距,则物点 S_0 所对应的像点 S'_0 的位置由方程(1)、(2) 决定.

解之得

$$X = \frac{X_0 f}{X_0 + f} \quad (3)$$

$$Y = \frac{Y_0 f}{X_0 + f} \quad (4)$$

进一步,当建立空间直角坐标系 $O-XYZ$. 设物点 S_0 的坐标为 (X_0, Y_0, Z_0) , 像点 S'_0 的坐标为 (X, Y, Z) .

则可以证明,必有

$$Z = \frac{Z_0 f}{X_0 + f} \quad (5)$$

通过这一变换,对空间任何物点 S_0 , 只要已知它的坐标 (X_0, Y_0, Z_0) , 其像 S'_0 的位置 (X, Y, Z) 便可由公式(3)、(4)、(5) 唯一确定,并精确计算出来. 也即可在坐标系中逐点描绘出来.

结论 1:对空间任一物点,其对应的凸透镜成像点由公式(3)、(4)、(5) 唯一确定.

公式(3)、(4)、(5) 被称为凸透镜成像坐标定位公式.

1.2 空间线段的凸透镜成像坐标定位

讨论 OXY 平面上以任意两点 $S_1(X_1, Y_1)$, $S_2(X_2, Y_2)$ 为端点的线段 S_1S_2 , 设其像点的坐标为 $S'_1(X'_1, Y'_1)$, $S'_2(X'_2, Y'_2)$.

1.2.1 如果线段 S_1S_2 没跨越焦平面 F , 则其凸透镜成像必为一线段. 如图 1 所示.

证明:在线段 S_1S_2 上任取一点 $S_3(X_3, Y_3)$, 因 S_1S_2, S_3 在一直线上, 线段 S_1S_3 与线段 S_3S_2 斜率相等

$$K = \frac{Y_2 - Y_3}{X_2 - X_3} = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}$$

连接像点 S'_1 和 S'_3 , 则通过 S'_1 和 S'_3 的直线方程为

$$\frac{Y' - Y'_3}{Y'_1 - Y'_3} = \frac{X' - X'_3}{X'_1 - X'_3}$$

代入公式(3)、(4), 整理, 可得其斜率

$$K_1 = \frac{KX_1 - Y_1}{f} + K$$

连接像点 S'_3 和 S'_2 , 则通过 S'_3 和 S'_2 的直线方程为

$$\frac{Y' - Y'_2}{Y'_3 - Y'_2} = \frac{X' - X'_2}{X'_3 - X'_2}$$

代入公式(3)、(4), 可得其斜率

$$K_2 = \frac{KX_3 - Y_3}{f} + K$$

因为

$$K = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}$$

所以

$$K_1 = K_2$$

由数学定理:通过同一点的两直线, 如果它们斜率相等, 则它们必重合.

又因为 S_3 为任意, 所以 S'_1, S'_3, S'_2 必成一“直的”线段.

1.2.2 如果线段 S_1S_2 跨越焦平面 F , 则其凸透镜成像也必为一“线段”. 但此时“线段” $S'_1S'_2$ 中间裂开、并向两端发散, 变为仍在一直线上的两射线.

证明:如图 2 所示, 在线段 S_1S_3 上取点 S_4 , 在线段 S_3S_2 上取点 S_5 . 借助于 S_4 和 S_5 , 用上述方法同理可证, 线段 $S'_4S'_1, S'_4S'_2, S'_5S'_2$ 的斜率均相等, 且通过公共点 S'_1 和 S'_2 , 所以都在同一条直线 $S'_1S'_2$ 上.

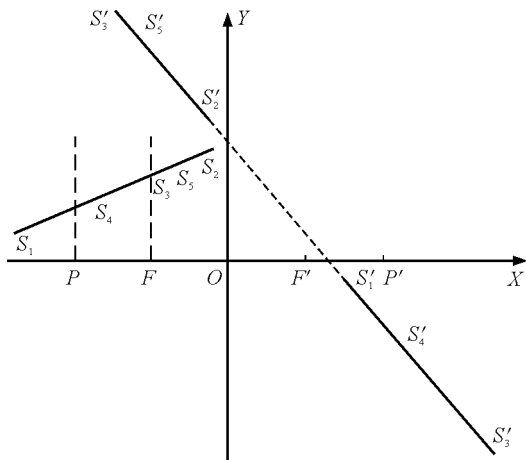


图2 跨越焦平面线段的凸透镜成像

特殊地,若把 S_3 取在焦平面上,很明显它的像 S'_3 就在这直线的无穷远“端点”上。

1.2.3 上述两结论,同理也可推广到空间直角坐标系。

结论 2:对空间任一线段,第一,若它未跨越焦平面,其对应的凸透镜成像仍为一线段;第二,若跨越焦平面,其凸透镜成像便分裂、向两端发散,变为仍在一直线上的两射线。而且线段与焦平面交点的像,便是此直线的无穷远“端点”。

此结论被称为凸透镜成像坐标定位法则。

2 凸透镜成像坐标定位法作图

2.1 由“凸透镜成像坐标定位公式”可逐点描绘平面图形的精确成像

【例 1】画出一不跨越界面 F 的圆的凸透镜成像图,如图 3 所示。

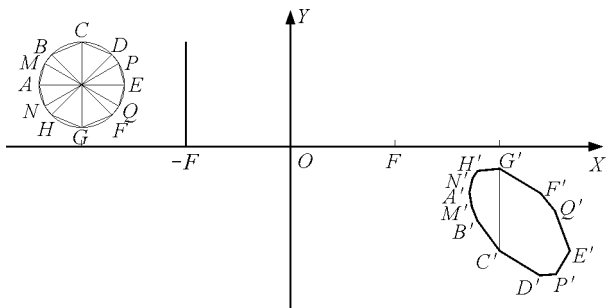


图3 不跨越焦平面 F 的圆的凸透镜成像图

(1) 建立坐标系,定焦距 $f = 100$;圆的直径为 80。

(2) 用八边形来逼近此圆,设定拐点坐标。若需要更精细的部位,可多增设几个点;

(3) 根据结论 1 公式(3)、(4) 计算出对应像点的坐标。建立数据表(略)。

(4) 逐点描绘出图像。

若使用“Excel”或“几何画板”等工具,则数据表和图像都可自动生成,非常方便、快捷。

2.2 由凸透镜成像坐标定位法结论 2 描绘跨越界面 f 的图形的精确成像

【例 2】精确画出一跨越界面 F 的三角形的凸透镜成像,如图 4 所示。

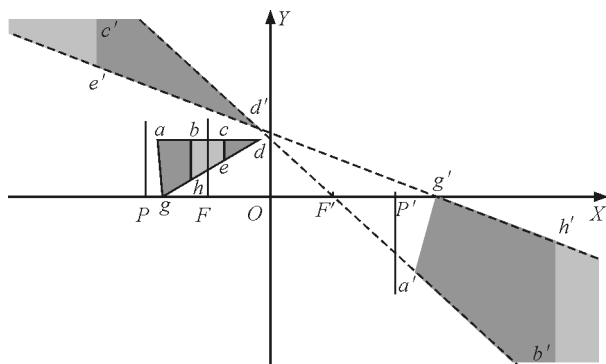


图4 跨越焦平面的平面三角形凸透镜成像图

(1) 设定 $f = 60, a, d, g$ 的坐标如表 1 所示。

表 1 跨越焦平面的平面三角形凸透镜成像数据表

$f = 60$	X_0	Y_0		X	Y
a	-112	80	a'	149.33	-106.66
d	-12	80	d'	-14.76	98.46
g	-102	0	g'	171.78	0

(2) 由结论 1 公式(3)、(4),计算出像点 a', d', g' 的坐标。列出数据表。

(3) 由结论 2 第一条,因线段 ag 没跨越界线 F ,可直接连接 a', g' ;由结论 2 第二条,因线段 ad, gd 均跨越界线 F ,故先用虚线连接 a', d' 和 g', d' ,再反向向两端画延长线。即得完整图形。

2.3 结合凸透镜成像坐标定位法两个结论描绘跨越焦平面 F 的空间立体图形的精确成像

在空间直角坐标系 $O-XYZ$ 中,置透镜于 OYZ 平面,光心与原点 O 重合,光轴与 OX 轴重合。

【例 3】空间三棱锥凸透镜坐标定位成像(Z 坐标: $45^\circ, 1:2$) 如图 5 所示。

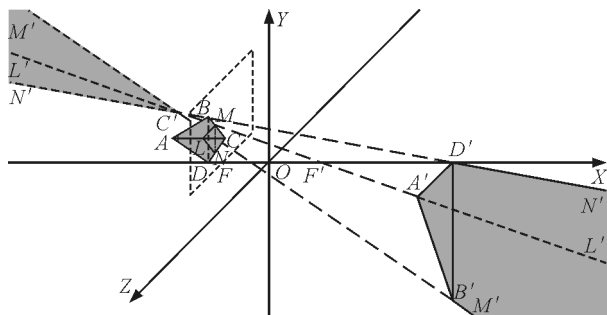


图5 空间三棱锥凸透镜坐标定位成像图

表2 空间三棱锥凸透镜坐标定位成像数据表

$f = 60$	X_0	Y_0	Z_0		X	Y	Z
A	-100	60	80	A'	150	-90	-120
B	-80	60	0	B'	240	-180	0
C	-30	60	80	C'	-60	120	160
D	-80	0	0	D'	240	0	0

从数据表可以看出C点已越过焦平面,所以在作图时, A', B', D' 之间可直接连接. 但由结论2,所有连接像点C'的线段 $A'C', B'C', D'C'$ 都必须向两端反向延长至无穷.

3 “凸透镜成像坐标定位法”作图要点

由上节所述,可概括总结得出坐标定位作图法的作图要点:

- (1) 建立坐标系,定焦距 f ;
- (2) 在坐标系左侧画出物体图形,设定拐点坐标,应避免将拐点设在焦平面 F 上;

(3) 根据结论1公式(3)、(4),计算出对应像点的坐标,建立数据表;

(4) 根据结论2第一条,先画没跨越焦平面 F 的线段的像线,可直接连接其像点;根据结论2第二条,对跨越焦平面 F 的线段,应先用虚线连接其像点,再反向向两端画出延长线,即得物体完整的凸透镜成像图.

4 结论

(1) 本文简要地对“凸透镜成像坐标定位法”的创建进行了证明. 重点突破传统“透镜成像作图法”存在的问题,精确确定了每一像点的位置,并画出跨越焦平面物体的发散光路图.

(2) 举例阐明了“凸透镜成像坐标定位法”的作图方法、要点及注意事项.

(3) 本文所建立的“凸透镜成像坐标定位法”可广泛应用于几何光学教学、研究,以及教学仪器的设计制作等.

(4) 此方法同样适用于其他各类透镜、反射镜等.

参考文献

- 1 李晓彤. 几何光学·像差·光学设计(第三版). 杭州:浙江大学出版社,2014. 2~90
- 2 王家伟. 巧用数学法解凸透镜成像问题. 中学物理, 2013,31(8):89
- 3 刘凯伦. 凸透镜成像的数学模型——凸透镜数据成像基本原理的探究. 第32届青岛市科技创新成果大赛.

Coordinate Location Method of Convex Lens Imaging in Three Dimensional Space

Liu Kailun

(Qingdao second middle school, Shandong Qingdao, Shandong 266061)

Abstract: In this paper, we deeply explore the law of convex lens imaging of spatial point and line segment, a new imaging method "convex lens imaging coordinate positioning method" is summarized. It breaks through some difficult problems that cannot be solved by traditional geometrical optics "The drawing method of lens imaging". The position of each image point in the coordinate system and the shape of Convex lens imaging can be accurately located, Draw the solid divergence image of the three-dimensional object across the focal plane. The drawing key points and matters needing attention of "convex lens imaging coordinate positioning method" are illustrated by examples

Key words: the drawing method of convex lens imaging; coordinate positioning method; coordinate positioning data table