巧借数学工具　妙解物理极值

何纪达

（浙江省春晖中学　浙江 上虞　312300）

（收稿日期：2017－07－31）

摘　要：对高考常考的求物理极值问题，提出了数学图像、矢量图示、三角函数、二次函数、均值不等式等 5 种解决思路与方法. 每一种方法都利用典型实例进行了详细阐述. 这些实例包含了最常见的几个物理量的极值问题，例如位移、力、速度、动能、功率等.

关键词：物理极值　高考物理　数学工具

在大量的物理情景中，物理量之间总是存在相互联系，一些物理量会随着另一些物理量的变化而变化，或不断增加，或不断减小，或先增加后减小或先减小后增加等等. 在一定范围内，这些物理量都存在着极大值或极小值，这就是所谓的“极值问题”.

极值问题往往综合性较强，能力要求较高. 要有效解决这类问题，需要学生具备较高的思维水平、推理能力以及应用数学知识处理问题的能力. 因此，极值问题也往往成为每年高考中的一类常考题型[1].

下面，笔者通过实例，阐述如何灵活借助数学工具，巧妙解决高中物理中的极值问题.

1　借助数学图像求极值

图像具有直观、可视性强等特征，巧妙地借助数学图像能更好地帮助学生理解物理过程，得出物理规律和解决物理极值问题. 比如，在某个物理过程中，速度随时间先增大后减小或先减小后增大时，通过作“$v-t$”图像就能直观地得出结论. 图像最高点表示速度最大，此时图像斜率为零，即加速度 $a=0$.

【例 1】 如图 1 所示，用绝缘细线竖直悬挂一质量为 m 带正电小球，其带电荷量为 q，小球处于方向水平向右，场强为 E 的匀强电场中. 现把小球由静止释放，问小球在电场力作用下偏离竖直方向的角度 θ 为多大时，小球的动能最大，最大动能为多少？

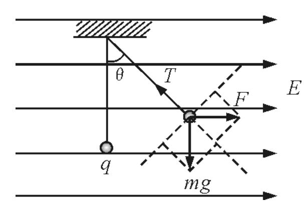

图 1　例 1 题图

解析：在如图 1 受力分析的基础上，结合牛顿第二定律，可得小球在沿切线方向有

$$Eq\cos\theta - mg\sin\theta = ma$$

随着角度 θ 增大，小球沿切线方向先做加速度不断减小的加速运动，再做加速度不断增大的减速运动，运动图像如图 2 所示.

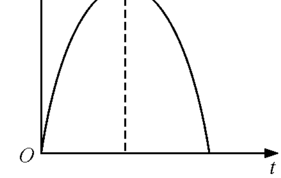

图 2　$v-t$ 图像

从图像可以直观地得出，在最高点时，速度达最大（即动能最大）. 此时，图像斜率为零，加速度 $a=0$ 时

$$Eq\cos\theta = mg\sin\theta$$

即当 $\tan\theta=\dfrac{Eq}{mg}$ 时

$$E_{\mathrm{kmax}} = EqL\sin\theta - mgL(1-\cos\theta)$$

在动力学分析的基础上,巧妙结合数学图像确定物理量的极值,能起到事半功倍的效果.

2　借助矢量图示求极值

所谓矢量图解法就是通过作矢量图来分析或求解某个物理量的大小及变化趋势的一种解题方法.通过作矢量图来揭示物理过程、物理规律,具有直观形象、简洁明了等优点.它特别适合处理物体受3个力作用而处于动态平衡的问题,既容易定性判断和分析,也可作定量计算.

【例2】如图3所示,用OA与OB两根轻绳将物体悬于两竖直墙之间,开始时OB绳水平.现保持O点位置不变,改变OB绳长使绳端由B点缓慢上移至B'点,此时OB'与OA之间的夹角$\theta < 90°$.求此过程中θ为多少时OB绳的拉力最小?拉力的最小值为多少?

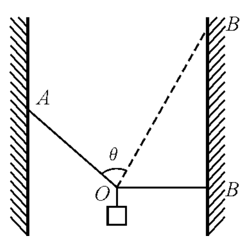

图3　例2题图

解析:选结点O为研究对象,其受到F_A,F_B和mg 3个力的作用而平衡.此3个力构成一个封闭的动态三角形,如图4所示.由矢量图容易看出,F_B先减小后增大,当$F_A \perp F_B$时,F_B取到最小值,最小值为$mg\sin\alpha$.

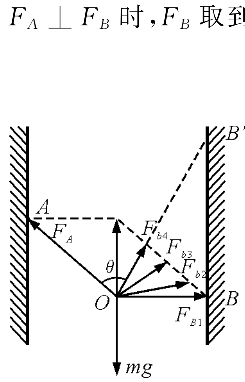

图4　受力分析

通过矢量图的分析,可以避开较繁琐的数学运算,能更为直观、便捷地得出物理量的变化情况,从而快速确定极值.

3　借助三角函数求极值

高中生对三角函数的知识并不陌生,已经基本具备借助三角函数解决物理极值问题的能力.当物理量随角度变化时,通过物理分析,得出其与三角函数之间的关系.结合三角函数的取值范围,就能确定物理量的极值.

【例3】有两根光滑的绝缘杆,可在同一竖直平面内绕O点转动,两杆上各穿着一个质量为m,电荷量为q的小球.两杆与水平面的夹角都等于θ时,两球在同一水平面上处于静止状态.如图5所示,现使两杆同时绕O点在纸面内缓慢转动,此时小球在杆上的位置随之改变.问θ取何值时,小球到O点的距离L为最小?L的最小值为多少?

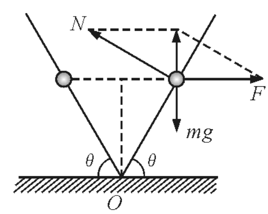

图5　例3题图

解析:取其中一个小球为研究对象,通过受力分析,容易得到

$$\frac{kq^2}{(2L\cos\theta)^2} = mg\tan\theta$$

整理可得

$$L = q\frac{k}{4mg\sin\theta\cos\theta}$$

利用$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,即得

$$L = q\frac{k}{2mg\sin 2\theta}$$

由三角函数知识可知,当$\theta = 45°$时,L取到最小值

$$L_{\min} = q\frac{k}{2mg}$$

随着角度的变化,两球间距离、库仑力及两球相对杆的位置都会发生动态变化,物理过程复杂,难以直接从物理视角得出极值.然而,所有量的变化都是由角度的变化引起的,当确定了L与θ的关系,结合三角函数知识,便能快速得出极值.

4　借助一元二次函数求极值

利用一元二次函数求极值，是高中物理中最常出现的求极值方法．学生对此也并不陌生，教师需要做的就是引导学生把物理关系式与一元二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 相联系．当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$f(x)$ 达到极值．

【例 4】如图 6 所示为某种弹射小球的装置．每次弹射前，推动小球将弹簧压缩到同一位置后释放，已知弯管 BC 半径 $R=0.40$ m，小球质量 $m=0.1$ kg．当调节竖直细管 AB 的长度 L 至 $L_0=0.80$ m 时，发现小球恰好能过管口 C 端．问：L 取多大时，小球飞出后水平位移最大？（不计小球机械能损失，$g=10\ \mathrm{m/s^2}$）．

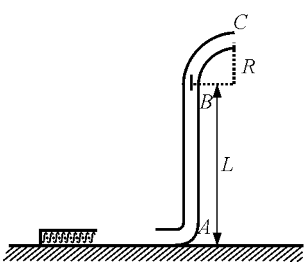

图 6　例 4 题图

解析：根据题意可得弹簧每次对小球做功 $W=mg(L_0+R)$．设 AB 长为 L，由动能定理得

$$W-mg(L+R)=\frac{1}{2}mv_C^2$$

小球从 C 点飞出后做平抛运动：$L+R=\dfrac{1}{2}gt^2$，$x=v_Ct$．由此得

$$x=2\sqrt{-L^2+0.4L+0.32}$$

当 $L=0.2$ m 时，水平位移最大，最大值为 1.2 m．

这类极值问题往往能同时考查学生对圆周运动、平抛运动及动能定理等多个知识点的掌握情况．因此，更受出题者的青睐．

5　借助均值不等式求极值

数学中，均值不等式的一般形式为

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$$

当满足不同的条件时，可分别取到极大值或极小值．

5.1　积定和最小

当满足 $a_1a_2a_3\cdots a_n=C_1$（C_1 为定值）时，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 存在极小值，当且仅当 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时，取到极小值．这种情况可总结为“积定和最小”．

例如，对于形如“$f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$”的函数（由于其图像的特点而被称为“对勾函数”），当且仅当 $ax=\dfrac{b}{x}$ 时，$f(x)$ 取到极小值．在物理问题中，若两个物理量间关系存在类似于“$f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$”的形式时，就可以利用数学规律快速确定物理量的极值．

【例 5】一探险队员在探险时遇到一山沟，山沟的一侧竖直，另一侧的坡面呈抛物线形状．此队员从山沟的竖直一侧，以速度 v_0 沿水平方向跳向另一侧坡面．如图 7 所示，以沟底的 O 点为原点建立坐标系 Oxy．已知，山沟竖直一侧的高度为 $2h$，坡面的抛物线方程为 $y=\dfrac{1}{2h}x^2$，探险队员的质量为 m．人视为质点，忽略空气阻力，重力加速度为 g．

（1）求此人落到坡面时的动能；

（2）此人水平跳出的速度为多大时，他落在坡面时的动能最小？动能的最小值为多少？

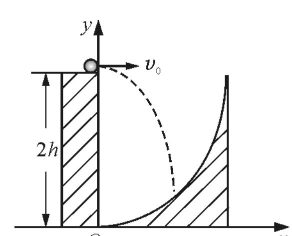

图 7　例 5 题图

解析：（1）此人飞出后做平抛运动，设经过时间 t 落到坡面上，落点坐标为 (x,y)．

其中

$$x=v_0t\qquad y=2h-\frac{1}{2}gt^2$$

将 x，y 代入坡面方程可解得

$$t^2=\frac{4h^2}{v_0^2+gh}$$

从抛出到落地的过程运用动能定理

$$mg\left(\frac{1}{2}gt^2\right)=E_k-\frac{1}{2}mv_0^2$$

即得人落到坡面时的动能

$$E_k=\frac{2mg^2h^2}{v_0^2+gh}+\frac{1}{2}mv_0^2$$

(2) 将 E_k 变形后可得

$$E_k=\frac{2mg^2h^2}{v_2^2+gh}+\frac{1}{2}m(v_0^2+gh)-\frac{1}{2}mgh$$

将"v_0^2+gh"看成一个整体,E_k就具有对勾函数"$f(x)=ax+\frac{b}{x}$"的形式.所以,当满足

$$\frac{2mg^2h^2}{v_0^2+gh}=\frac{1}{2}m(v_0^2+gh)$$

即当 $v_0=\sqrt{gh}$ 时,E_k 取到最小值

$$E_{k\min}=\frac{3}{2}mgh$$

5.2　和定积最大

当满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=C_2$($C_2$ 为定值)时,$a_1a_2a_3\cdots a_n$ 存在极大值,当且仅当 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时,取到极大值.这种情况可总结为"和定积最大".

【例 6】如图 8 所示,质量为 m 的小球用细线悬挂于 O 点,细线长为 L,现将细线拉至水平位置,使小球从 A 点由静止摆下,求轻绳与水平方向夹角为多少时重力的功率最大,最大功率为多少?(小球可视为质点)

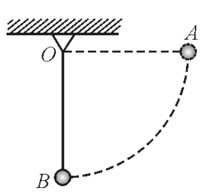

图 8　例 6 题图

解析:设经过一段时间后,轻绳与水平方向的夹角为 θ,小球速度为 v.如图 9 所示.

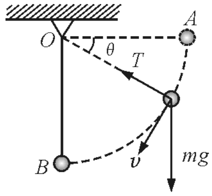

图 9　过程分析

根据动能定理

$$mgL\sin\theta=\frac{1}{2}mv^2\tag{1}$$

重力的功率为

$$P=mgv\cos\theta\tag{2}$$

由式(1)、(2)可得

$$P^4=16m^4g^6L^2\sin^2\theta\frac{\cos^2\theta}{2}\frac{\cos^2\theta}{2}$$

因为 $\sin^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}=1$,所以 P 存在极大值.当满足 $\sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta}{2}$,即 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,P 取到最大值,$P_{\max}=\frac{2}{3}mg\sqrt{\sqrt{3}gL}$

另外,在大学物理或高等数学中,借助导函数等于零[$f'(x)=0$]求极值也是一种常用的方法.但根据《普通高中物理课程标准》[2],这不属于高中的教学要求.所以,关于这种方法在文中不作讨论.

综上所述,解决物理极值问题,既不能脱离物理,将问题彻底数学化,使物理问题沦为纯粹的数学习题.同时,也不能因为害怕把物理问题数学化,而刻意排斥和回避数学知识在解决物理问题时所起的作用.在物理分析的基础上,合理地借助相关数学知识,才是解决物理极值问题时的最好选择.只有巧借数学知识,才能妙解物理极值.

本文所述几种借助数学知识巧解物理极值问题的方法,仅仅是笔者在有限的教学经历基础上,所作的浅显总结,并不涵盖所有的方法.笔者希望借此"抛砖引玉",激发广大读者对这类问题的更深入探讨.

参 考 文 献

1　侯红彬,范晓波.保持物理本色 原味求解极值.物理教师,2017(3):87 ~ 89

2　中华人民共和国教育部.普通高中物理课程标准(实验).北京:人民教育出版社,2014