2017年高考全国理综卷Ⅰ第21题的解析和思考

余胜军
(保定市教育科学研究所 河北 保定 201000)

(收稿日期:2017-08-09)

摘 要:2017年高考全国理综卷Ⅰ第21题,考查常规的三力动态平衡问题,但是在用常规的正交分解法或者矢量三角形方法解决此题时,却会遇到较大的麻烦.用多种方法解答了此题,并对解题方法进行归纳总结.

关键词:三力平衡 正交分解 矢量法则

1 试题及其情境分析

【题目】(2017年高考全国理综卷Ⅰ第21题)如图1所示,柔软轻绳 ON 的一端 O 固定,其中间某点 M 拴一重物,用手拉住绳的另一端 N,初始时,OM 竖直且 MN 被拉直,OM 与 MN 之间的夹角为 $\alpha\left(\alpha>\frac{\pi}{2}\right)$.现将重物向右上方缓慢拉起,并保持夹角 α 不变.在 OM 由竖直被拉到水平的过程中( )

A. MN 上的张力逐渐增大

B. MN 上的张力先增大后减小

C. OM 上的张力逐渐增大

D. OM 上的张力先增大后减小

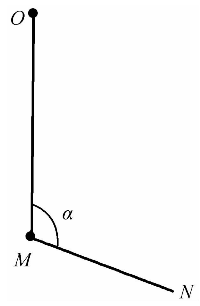


图1 题图

本题是一个常规的三力动态平衡问题,常用的方法是正交分解法,即以物体为研究对象,建立直角坐标系,把3个力沿两个坐标轴进行分解,根据质点平衡原理列出两个坐标轴上的平衡方程,根据角度的变化判断力的变化.其次是用矢量三角形方法,3个力平衡,通过平移后,3个力的矢量线段将组成首尾衔接的三角形,根据三角形的边、角变化来判断力的变化.

但是笔者分别用两种解题方法进行解答,发现如下问题:

(1)用正交分解法解答本题时,首先是确立变量角度的问题,在动态变化的受力分析图中,找到合适的变量角度不容易.其次是平衡方程的建立,找到角度的几何关系是关键.最后是根据数学三角函数的各种变化推导,这对三角函数及其变换有很高的要求,且用时较长,高考答题过程中考生很难平心静气地逐步解答此题.因为性价比太低,远超6分的题目应该消耗的时间.

(2)用矢量三角形方法解答本题时,作出某时刻的矢量三角形很容易,但是要找到连续变化的矢量三角形之间的关系却不容易,关键是不能迅速找到三角形中变量和不变量的关系,或者是找不到画连续变化三角形的参考线或辅助线.

接下来,笔者将用两种方法解答此题并进行详细的阐述.

2 正交分解法解题

解法1:建立常规的水平竖直方向的直角坐标系

以重物为研究对象,转过较小角度和较大角度时受力情况如图2(a)、(b)所示.

对图2(a),建立水平方向和竖直方向的直角坐标系,分解各力,其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 角是 OM 转过的角度,重物处于平衡状态,列方程得:水平方向上

$$T_{OM}\sin\theta=T_{MN}\cos\left(\alpha-\theta-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$

竖直方向上

$$T_{OM}\cos\theta=mg+T_{MN}\sin\left(\alpha-\theta-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

先进行三角函数变换,去掉表达式中的 $\frac{\pi}{2}$,得到对应表达式.

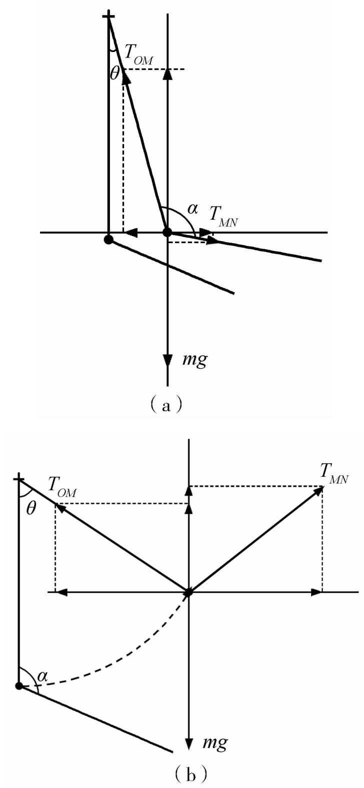


图2　解法1受力分析图

水平方向上

$$T_{OM}\sin\theta = T_{MN}\sin(\alpha - \theta) \tag{3}$$

竖直方向上

$$T_{OM}\cos\theta = mg - T_{MN}\cos(\alpha - \theta) \tag{4}$$

式(3)除以式(4)得

$$\tan\theta = \frac{T_{MN}\sin(\alpha - \theta)}{mg - T_{MN}\cos(\alpha - \theta)}$$

整理得到

$$T_{MN} = \frac{mg}{\cos(\alpha - \theta) + \dfrac{\sin(\alpha - \theta)}{\tan\theta}}$$

再利用三角函数的两角和差公式进一步整理

$$T_{MN} = \frac{mg}{\dfrac{\sin\theta\cos(\alpha - \theta)}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta\sin(\alpha - \theta)}{\sin\theta}} =$$

$$\frac{mg}{\dfrac{\sin(\theta + \alpha - \theta)}{\sin\theta}} = mg\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$$

即

$$T_{MN} = mg\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \tag{5}$$

代入式(3)得到

$$T_{OM} = mg\frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin\alpha} \tag{6}$$

由题设条件和式(5)、(6)知道，mg 和 α 是不变量，随着 θ 角增大，T_{MN} 一直增加，所以 MN 的张力一直增大；当 $\alpha - \theta$ 等于 $90°$ 时 T_{OM} 达到最大值，所以 OM 上的张力先增大后减小. 正确答案为A和D.

对图2(b)所示，根据平衡有：水平方向上

$$T_{OM}\sin\theta = T_{MN}\sin(\alpha - \theta)$$

竖直方向上

$$T_{OM}\cos\theta + T_{MN}\cos(\alpha - \theta) = mg$$

由此可见，上面两个表达式跟式(3)、(4)一样，也就是说转过的角度大小不影响平衡方程的最终表达，图2(a)、(b)结论归一.

综合观察上面的解法，显而易见，如此解答，耗时耗力，不经济！我们都知道，建立直角坐标系时坐标轴方向的选择是任意的，以分解力的数量少和简化解题过程为原则. 那么本题建立坐标系能不能选别的方向呢？请看下面解答.

解法2：选择另外两个力为坐标系的其中一轴(估计想到此法的考生不多)

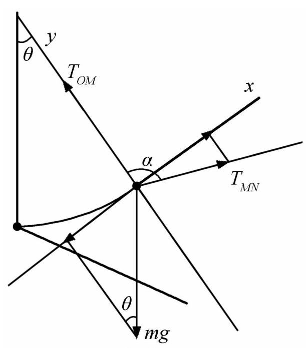
如图3(a)所示，选择 OM 的方向为 y 轴，垂直 OM 方向为 x 轴，如此选取坐标轴的意义在于：在 x 轴上平衡，只有 T_{MN} 和 mg 两个力的分力，不涉及第三个力，直接找到变量关系. 由几何关系直接得到

$$T_{MN}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = mg\sin\theta \tag{7}$$

如图3(b)所示，选择 MN 的方向为 x 轴，垂直 MN 方向为 y 轴，如此选取坐标轴的意义在于：在 y 轴上平衡，只有 T_{OM} 和 mg 两个力的分力，不涉及第三个力，直接找到变量关系. 由几何关系直接得到

$$T_{OM}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = mg\cos\left[\theta - \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{8}$$

整理式(7)、(8)，同样得到式(5)、(6).



(a)

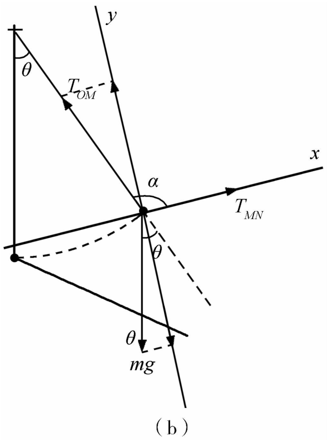


图 3 解法 2 换方向建立坐标轴

由此可见,灵活选取坐标轴的方向建立坐标系,有时候是能够简化分析过程和推导过程的.

3 矢量法解题

矢量法解题,就是利用力的示意图或图示,直接根据平行四边形或者三角形图形及其几何关系直观得出结论的方法.

解法 3:矢量三角形

以重物为研究对象,缓慢拉起,重物处于平衡状态.受力分析后平移 F_{OM} 和 F_{MN} 得到矢量三角形如图 4 所示,由三角形正弦定理得

$$\frac{mg}{\sin\theta}=\frac{F_{OM}}{\sin\gamma}=\frac{F_{MN}}{\sin\beta} \tag{9}$$

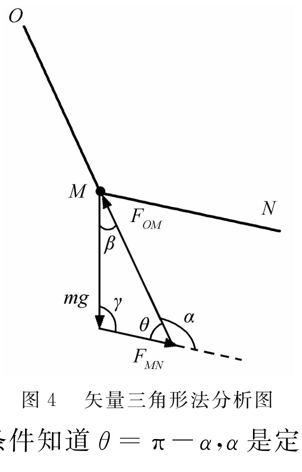


图 4 矢量三角形法分析图

由题设条件知道 $\theta=\pi-\alpha$,α 是定值,重力大小方向不变,所以这是一个定值等比式.缓慢拉起的过程中 γ 先减小到 90°,再继续减小,β 一直增大,所以 F_{OM} 先增大后减小,F_{MN} 一直增大.

用此方法解题的难点之一便是确定 θ 是定值,作图时有些必要辅助线能帮助我们迅速找到关系.另外一个难点是根据物理情确定三角形角度的变化情况.

解法 4:利用参考圆解题

由解法 3 知道,重力矢量长短及方向不变,矢量三角形中重力所对的角度在缓慢抬起的过程中不变,根据圆的几何性质知道,可以把重力矢量看成某圆的一条固定弦,另外两个力的首尾衔接点在该圆周上,根据圆周角定理知道,重力所对圆周角不变,跟解法 3 的结论完全一致.画出典型的矢量三角形图像如图 5 所示,当 MN 水平时,OM 恰好过圆心,此时 F_{OM} 矢量达到最大值,所以 F_{OM} 先增大后减小,F_{MN} 矢量所对圆周角逐渐增大,所以其大小逐渐增大.

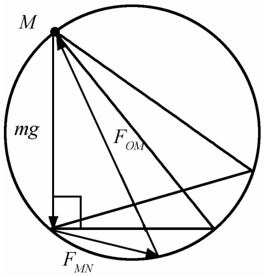


图 5 用参考圆解题分析图

解法 5:利用等效思想解题

在缓慢抬起 MN 的过程中,MN 与 OM 的夹角不变,两绳子张力的合力 G 大小和方向均不变,为了使得作图方便,看起来直观,可以用合力 G 顺时针偏转来等效替代绳子的逆时针旋转.这样,G 矢量一端的轨迹构成参考圆,半径为 G,如图 6 所示.把初始状态的 MN 平行向外平移,与圆周相切于 Q 点.

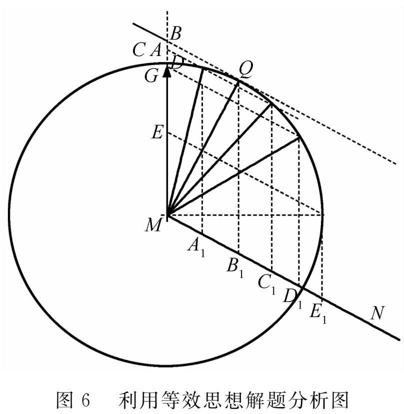


图 6 利用等效思想解题分析图

由图可知 T_{OM} 矢量端点由 A 到 B,达到最大值,然后依次下降到 C,D,E,所以 T_{OM} 先增大后减小.而 T_{MN} 端点依次向外为 A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,逐渐增大.

解法 4 的难点是想到参考圆,解法 5 的难点是想到等效替代的思想和画出参考圆,并找到直径

OM(解法 4) 和切线 QB(解法 5) 这个临界条件.

4 解题反思与启示

以上是笔者想到的 5 种解法、两种思路.其中解法 1 和解法 2 为比较常规的方法,从物理规律入手,当然推算过程稍显复杂;解法 3、解法 4 和解法 5,思考起点虽是物理受力分析和平衡规律,但解题入手点和思维方法却更偏重于几何知识,典型的应用数学解决物理问题,是数学物理方法,其难点在于能否根据物理情景迅速抽象出几何模型,并在几何模型中找到变量关系.很显然,前两种解法很规矩,后面 3 种解法更直观简便,但是解答难度相差无几,能用什么方法关键在于考生自己的能力结构,和本题考查的知识结构相关度不大.

如何形成优良的能力结构?笔者想,除了扎实的物理基本功底之外,还在于学生有足够多实践机会,在关键时候得到恰当的点拨,绝不是教师喋喋不休,代审题、代解题等包办代替的教学活动能够形成的.所以设置合适的物理情境,采用一题多解、多题归一的教学活动,给予学生思考、动手动脑的机会,实战中一定会形成学生优良的能力结构.而且学生对数学知识应该会比教师更熟悉,欠缺的只是跟物理模型的结合训练而已,一旦学生掌握用某种数学工具解决物理问题,一定会比教师解决得更快.

(上接第 97 页)

拉成半圆形,如图 6(a) 所示.然后将半圆图形复制并旋转 180 度,口对口错开相对,中间连接一条线段最后组合一起,如图 6(b) 所示.接下来按 Ctrl+C 并左击拖动鼠标复制数个组合好的图形(b),全选所有图形,格式设置为纵向分布上下对齐,如图 6(c) 所示.最后在自选图形中选一个矩形,画出一个可以镶嵌在螺线管中部的矩形,设置为无填充叠放于螺线管底部并组合,如图 6(d) 所示.

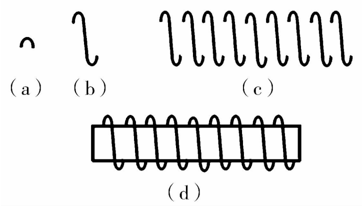
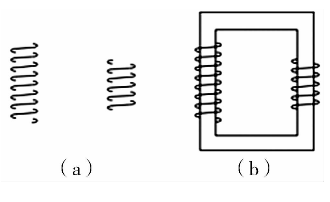


图 6 通电螺线管的绘制过程

3.3 变压器的画法

变压器的绘制就可以利用上述所绘制的螺线管,选上述图 6(c) 图形,将其复制两个出来,全部旋转 90 度并取消组合删除不需要的部分,如图 7(a) 所示.然后画出两个矩形填充为无色,如图(b) 放置.最后添加一些标示文本并组合,如图 7(c) 所示,并且将其另存为图片形式保存.



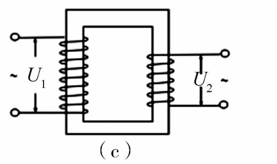


图 7 变压器的绘制过程

4 总结

从这几个案例中,可以看出凡是矢量图形,不管它们有多么复杂都可以用 Word,WPS 或 PowerPoint 中的绘图工具绘制出来,除电磁学外,初、高中物理中需要绘制的图形也特别多,方式方法都是相通的,教师们只需掌握基本工具的使用方法,平时多去绘制并把绘制过的常用矢量图保存在文档中,积累绘制的图形,创建图形模板库就可以方便后续的制图并大大提高工作效率.

在 WPS 中绘制的图形还可以在 Office 中无缝地对接使用,同样用 Word 中的绘图工具也可以画出精美的矢量图,两者可以相互利用.Office2003 版本的文件小,占用计算机资源少,使用方便,可以作为首选.虽然 Office2003 版本更加有利于矢量图的绘制,但读者们也可以按照自己的喜好去选择.

参考文献

1 王春奎.浏览器矢量图形绘制工具的设计与实现:[学位论文].北京:北京邮电大学,2009

2 赵东旭,张琏珠.运行时在 PowerBuilder 数据窗口中绘制矢量图.计算机应用,2002,22(9):126