刚体转动方程的矢量式

—— 兼谈其与质点动力学的“内在统一性”

黄亦斌　曾建平
（江西师范大学物理与通信电子学院　江西 南昌　330022）
彭荣荣
（南昌工学院　江西 南昌　330022）

（收稿日期：2017 - 01 - 09）

摘　要：就刚体动力学中角动量公式和转动方程进行了分析，指出转动惯量张量不是常量，得到了相关的矢量式，并分析了一些对公式 $L = J\omega$ 和 $M = J\beta$ 的常见误解.

关键词：刚体动力学　定轴转动　转动惯量　矢量式

1　缘起

本刊 2016 年第 10 期刊文“刚体与质点动力学关系的内在统一性”[1]，把刚体力学与质点力学的相似性上升到某种理论高度. 该文的一些理解是正确的，如“牛顿第二定律和转动定理所描述的都是在外因作用下，适用对象运动状态的变化与外因量之间的关系”，两套力学之间确有一定的相似性和平行

$$y_C(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}d\right]$$

再说明 3 个波函数的等价性. 比较 3 个波函数发现，它们形式上大体相同，只不过，B 比 A 的相位角少了 $\frac{2\pi}{\lambda}d$，C 比 A 的相位角多了 $\frac{2\pi}{\lambda}d$. 这个区别是不难理解的：因为此波是往正向传播，C 点在 A 点左边，所以会比 A 点的相位要超前 kd，即 CA 的相位差为 kd；B 点在 A 点右边，所以会比 A 点的相位要落后 kd，即 AB 的相位差为 kd. 这个相位差在波函数的形式上体现出来，就是 B 的波函数相位角要比 A 的少 kd，而 C 的要比 A 多 kd，但他们描述的其实是同一列平面简谐波.

2.2.2　从表示某点的振动方程角度理解 3 个波函数的等价性

我们知道当波函数中 x 变量一定时，波函数转化为质点的振动方程. 下面用 3 个波函数来描写波线上 P 点的振动方程. 如果以 A 为坐标原点，则 P 点的坐标为 $x_P = u + d$，代入 A 的波函数得到 P 点的振动方程为

$$y_P(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{u+d}{u}\right) + \varphi_0\right] =$$

$$A\cos\left[\omega(t-1) - \frac{\omega d}{u} + \varphi_0\right]$$

如果以 B 为坐标原点，则 P 点的坐标为 $x_{P1} = u$，代入 B 的波函数得到 P 点的振动方程为

$$y_{P1}(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{u}{u}\right) + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}d\right] =$$

$$A\cos\left[\omega(t-1) - \frac{\omega d}{u} + \varphi_0\right]$$

如果以 C 为坐标原点，则 P 点的坐标为

$$x_{P2} = u + 2d$$

代入 C 的波函数得到 P 点的振动方程为

$$y_{P2}(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{u+2d}{u}\right) + \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}d\right] =$$

$$A\cos\left[\omega(t-1) - \frac{\omega d}{u} + \varphi_0\right]$$

比较发现 $y_P(t)$，$y_{P1}(t)$ 和 $y_{P2}(t)$ 实际上是一样的. 也就是说，从表示某点的振动方程的角度，间接说明 3 个波函数实际上是等价的.

参 考 文 献

1　马文蔚，等. 物理学(下册). 北京：高等教育出版社，2006. 48 ～ 54

2　夏峥嵘，等. 关于驻波的直观教学. 大学物理，2012(12)：42 ～ 44

性.但这种相似性是有限的,故而将该相似性上升到理论高度的基础也就不存在了.

该文的核心问题在于低估了刚体力学的复杂性.诚然,文献[1]对此确有警觉,始终谈论的是刚体运动的特殊情形——定轴转动.但即便如此,该文仍未能对此有充分警觉,从而导致错误.

如果仅讨论刚体定轴转动的轴向分量,那么所述的跟质点力学的相似性没有问题.设转轴为 z 轴,此时的相关公式(或方程)有

$$L_z = J\omega \qquad M_z = J\beta \tag{1}$$

其中 J 是刚体对 z 轴的转动惯量.(该量是下文转动惯量张量的 zz 分量,故而其严格记法是 J_{zz}.但在定轴转动情形,常省略一些,记为 J_z,甚至更省略地记为 J.)如果喜欢矢量式,那么只能得到

$$L_z \boldsymbol{e}_z = J\boldsymbol{\omega} \qquad M_z \boldsymbol{e}_z = J\boldsymbol{\beta} \tag{2}$$

其中已考虑到了角速度和角加速度都只有 z 分量.显然,式(1)和(2)包含完全相同的内容.但如果将其推广为

$$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\beta} \tag{4}$$

那么就错了:两式一般并不成立,且式(4)比式(3)错得更多.这种错误在一些大学物理教材中屡有出现,故值得提醒注意.

2　刚体角动量的矢量式

一般理论力学教材都对刚体角动量有详细论述,例如文献[2].具体的,刚体角动量 $\boldsymbol{L}$(对定点或质心)与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 存在线性关系,其矢量式是

$$\boldsymbol{L} = \overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5}$$

其中二阶张量 $\overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}}$ 称为转动惯量张量,其定义是

$$\overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}} = \sum_i m_i (r_i^2 \overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_i) \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 是质元 m_i 的矢径,r_i 是其大小,$\overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{E}}$ 是二阶单位张量.

式(5)只表明角动量 $\boldsymbol{L}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 有线性关系,而式(3)则进一步要求 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 方向相同.许多教材[3,4]都举例指出二者的方向并不一定相同.也许会问:式(5)针对的是一般情形,如果限制为定轴转动,结果是否会简单?不会.实际上,前述 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 不同向的例子正属于定轴转动.定轴转动时虽然 $\boldsymbol{\omega}$ 只有 z 分量,但 $\boldsymbol{L}$ 的 x,y 和 z 分量都存在.式(1)和(2)只告诉我们了 $\boldsymbol{L}$ 的 z 分量,但未涉及其 x,y 分量.实际上它们也跟角速度成正比

$$L_x = A\omega \qquad L_y = B\omega \tag{7}$$

注意角速度只有 z 分量,但它决定了角动量的 x,y 分量.所以,式(3)一般是错的.

3　刚体角动量定理(转动定律)的矢量式

如果把式(3)修正为式(5),那么新的式子

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}} \cdot \boldsymbol{\beta} \tag{8}$$

算是对式(4)的纠正,从而可以成为刚体动力学方程(对定点或质心)的一般形式吧?遗憾的是,这里又有新的错误,即使在定轴转动情形也不对.因为转动惯量张量 $\overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}}$ 不是常量,而是依赖于刚体空间位置的变量.在定轴转动情形,它则依赖于刚体的角坐标.

转动惯量张量怎么会不是常量?一般力学教材计算出的它的各个分量不是常数吗?首先,由于其定义式(6)中含有各质元的矢径 $\boldsymbol{r}$,故 $\overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}}$ 当然是变量.其次,可以建立两套坐标系,一套是静止系(x,y,z),一套是固连在刚体上的固连系(ξ,ζ,η).质元的矢径可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = \xi\boldsymbol{e}_\xi + \zeta\boldsymbol{e}_\zeta + \eta\boldsymbol{e}_\eta$$

($\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$,$\boldsymbol{e}_z$)是常矢量,坐标(x,y,z)是变量.由于质元固连于刚体,故坐标(ξ,ζ,η)是常量,而($\boldsymbol{e}_\xi$,$\boldsymbol{e}_\zeta$,$\boldsymbol{e}_\eta$)是变矢量.无论从哪种分解式看,$\boldsymbol{r}$ 都是变矢量.$\overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}}$ 的情形完全相同,有两套分解方式

$$\overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}} = \sum_{ij} J_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \sum_{ab} J_{ab} \boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_b \tag{9}$$

其中 $i,j = x,y,z$ 而 $a,b = \xi,\zeta,\eta$.张量 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 为常量,但其系数 J_{ij}[以式(7)中的 A,B 为特例]为变量;通常教材中给出的惯量矩阵在固连坐标系中写出的,其矩阵元 J_{ab} 当然都是常数,但同时其对应的固连系基矢是变量.无论如何,$\overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}}$ 是变量.

那么,动力学方程(8)该如何修改?通常是结合欧勒运动学方程写出其分量形式[2],未见其矢量式.其实,该矢量式并不复杂,为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega} \times \overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \overset{\rightharpoonup}{\boldsymbol{J}} \cdot \boldsymbol{\beta} \tag{10}$$

文献[2]“轴上的附加压力”一节中，所得方程中出现了 ω^2 项，这正来自式(10) 第一项.

式(10) 证明如下：根据角动量定理和式(5)，有

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}\cdot\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\omega}+\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\tag{11}$$

对于转动惯量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}$，取式(9) 中固连坐标系中的展开式. 由于对于任意固连于刚体的矢量 $\boldsymbol{A}$，其变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}\tag{12}$$

而($\boldsymbol{e}_\xi,\boldsymbol{e}_\zeta,\boldsymbol{e}_\eta$) 三者恰好固连于刚体，故而式(11) 右边第一项为

$$\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\omega}=\sum\nolimits_{ab}J_{ab}\left(\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_a}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_b+\boldsymbol{e}_a\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_b}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}=$$

$$\sum\nolimits_{ab}J_{ab}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_a\,\boldsymbol{e}_b\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{e}_a(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_b\cdot\boldsymbol{\omega})]=$$

$$\sum\nolimits_{ab}J_{ab}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_a\,\boldsymbol{b}_b\cdot\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

故得式(10).（注意，不要错误地认为$\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}$.）

另一证法是，当 $\boldsymbol{\omega}$ 是常矢量时，刚体的角动量 $\boldsymbol{L}$ 一定固连于刚体，故而由式(12) 有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right|_{\omega}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}$$

把式(5) 代入，即得式(10) 右边的第一项.

也许会问：一般情况复杂，但定轴转动会简单一些吧？不会，文献[2] 处理的轴上附加压力正是定轴转动情形. 那难道没有简化情形吗？有，而且是两种. 第一种是定轴转动，且只关心动力学方程的 z 分量. 此时结果就是式(1) 和(2). 第二种是刚体的转轴恰为其惯量主轴，此时矢量式(3) 和(4) 都成立.

文献[5]、[6] 也谈及了刚体力学和质点力学的平行性，但只是把定轴转动的 z 分量公式与质点一维运动情形做了对比，未推广到矢量式. 文献[6] 着重提醒：这种平行性可以帮助记忆，但并非基本. 在逻辑上，先有质点力学；加上牛顿第三定律得到质点系力学；再加入刚体假设，才有刚体力学. 如果觉得刚体的转动与平动(或质点运动) 在非常基本的层面上平行，就有可能将已有结果贸然推广到三维矢量情形，犯下错误.

最后要说明的是，本文所谓的“矢量式”，仅指其坐标无关性，形式上抽象、紧凑，并非真的仅指矢量，因为本文中还涉及二阶张量.

参 考 文 献

1 张明铎，郝长春，莫润阳，等. 刚体与质点动力学关系的内在统一性. 物理通报，2016(10)：25 ～ 28

2 周衍柏. 理论力学教程(第 3 版). 北京：高等教育出版社，128 ～ 144

3 漆安慎，等. 普通物理学教程·力学(第二版). 北京：高等教育出版社，2005. 221

4 张汉壮，等. 力学(第三版). 北京：高等教育出版社，2015. 153

5 黄亦斌，等. 大学物理(上册). 北京：高等教育出版社，2012. 52 ～ 53

6 黄亦斌，等. 新编大学物理教程. 北京：科学出版社，2017. 51 ～ 52

Vector Formula on Rotation Equation of Rigid Body

——Also on the “inner consistence” with mass point dynamics

Huang Yibin　Zeng jianping

(Jiangxi Normal University, Nanchang, Jiangxi　330022)

Peng rongrong

(Nanchang Institute of Science and Technology, Nanchang, Jiangxi　330022)

Abstract: The angular momentum formula and equation of rotation in rigid body mechanics are analyzed. It is pointed out that the tensor of the moment of inertia is not constant, and some related vectorial formulas are obtained. The common misunderstanding of the formulas L = Jω and M = Jβ are analyzed.

Key words: rigid - body dynamics; rotation around a fixed axis; the moment of inertial; vectorial formula