三维抛体问题

张梦安
（浙江省吴兴高级中学　浙江 湖州　313000）
邱为钢
（湖州师范学院理学院　浙江 湖州　313000）

（收稿日期：2017－02－02）

摘　要：依据不同三维抛体模型，采用合适的三维坐标系，来求解运动轨迹、落点特性和初始条件等问题.

关键词：三维　抛体　三维坐标系

平抛和斜面（曲面）结合的问题是高考的出题点[1,2]，自主招生题目[3,4] 倾向于斜抛和斜面结合. 文献[1～4] 中的抛体问题，实质是两维问题，与斜（曲）面的面没有关系. 实际生活中的抛体是三维问题，譬如足球入球网，网球（乒乓球）斜线过网落点，一些高考题和竞赛题已经采用三维抛体模型. 三维抛体问题，利用矢量分量、坐标、时间反演可以更加简单地求解. 我们以 3 个例子来说明这种方法的应用.

第一个例子是 2014 年中学生物理竞赛决赛第 2 题. 先简述原题：潜艇以发射速度 v_0 发射母弹，母弹在最高点分裂为同质量的 3 个分弹头，相对质心速度大小都是 v. 两个分弹头击中目标 W 和 N，两个目标距离是 L. 潜艇与两个目标的垂直距离是 d，如图 1 所示. 求潜艇位置和发射方向.

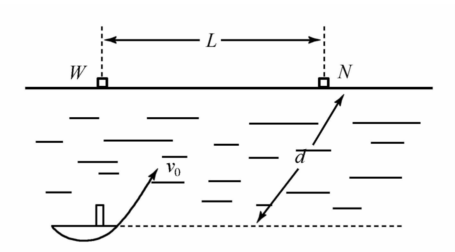

图 1　第一个例子题图

参考答案是以两个目标的中点为原点. 本文则以最高点为原点，两个目标连线方向为 x 轴. 设此时母弹的速度为 (v_x, v_y). 由正三角形对称性，两个弹头的速度为

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(v_x + \frac{\sqrt{3}v}{2}, v_y + \frac{v}{2}, 0\right) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left(v_x - \frac{\sqrt{3}v}{2}, v_y + \frac{v}{2}, 0\right) \tag{2}$$

从最高点计时，经过时间 t 击中目标，那么这两个目标的坐标是

$$\boldsymbol{N} = \left[\left(v_x + \frac{\sqrt{3}v}{2}\right)t, \left(v_y + \frac{v}{2}\right)t, -\frac{1}{2}gt^2\right] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{W} = \left[\left(v_x - \frac{\sqrt{3}v}{2}\right)t, \left(v_y + \frac{v}{2}\right)t, -\frac{1}{2}gt^2\right] \tag{4}$$

两目标横向距离为 L，即

$$\sqrt{3}vt = L \tag{5}$$

时间反演，由于最高点自由落体落到海面时间一样，那么相对最高点潜艇位置是

$$\boldsymbol{P} = \left(-v_x t, -v_y t, -\frac{1}{2}gt^2\right) \tag{6}$$

潜艇与目标的纵向距离是 d，即

$$\left(2v_y + \frac{v}{2}\right)t = d \tag{7}$$

发射速度为 v_0，即

$$v_x^2 + v_y^2 + (gt)^2 = v_0^2 \tag{8}$$

式(5)、(7)、(8) 联立，很容易得到 v_x，v_y，t 的值. 由时间反演，得到母弹发射时 3 个坐标轴方向的分速度，把发射方向算出来. 通过目标相对最高点，最高点相对潜艇，也能确定发射时潜艇的位置. 留作计算题给读者算一算.

第二个例子是斜面上喷水轨迹问题，模型是一个斜面上的喷泉，以与斜面垂直的方向固定夹角旋转出水，出水速率固定，求散落在斜面上水的轨迹. 如果在平面上，出水速度是 v，与地面夹角是 θ，那么落水轨迹是半径 $R = \dfrac{v^2 \sin 2\theta}{g}$ 的一个圆，那么斜面上的水迹是什么图形呢？

以喷泉为原点，设斜面与地面的夹角是 α，那么斜面的法向量

$$\boldsymbol{n} = (-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$$

斜面方程是

$$-x\sin\alpha + z\cos\alpha = 0$$

以转动角 ϕ 为参数,喷泉出水的速度分量是

$$\begin{aligned} v_x &= v(\cos\alpha\cos\theta\cos\phi - \sin\alpha\sin\theta) \\ v_y &= v\cos\theta\sin\phi \\ v_z &= v\sin\alpha\cos\theta\cos\phi \end{aligned} \tag{9}$$

其中 θ 是水流速度与垂直斜面矢量的夹角. 由此可得喷水空中轨迹方程

$$\begin{aligned} x &= vt(\cos\alpha\cos\theta\cos\phi - \sin\alpha\sin\theta) \\ y &= vt\cos\theta\sin\phi \\ z &= vt(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta\cos\phi) - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{10}$$

当水落在斜面上 $-x\sin\alpha + z\cos\alpha = 0$ 时,解得时间

$$t = \frac{2v\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

即水流在相同的时间落在斜面上. 再反代回到式(10),就能得到斜面上水的轨迹方程,垂直斜面俯视的话,以 $\frac{v^2}{g}$ 为长度单位,这个轨迹方程是

$$\left(x + \frac{2\sin\alpha\sin\theta}{\cos^2\alpha}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sin 2\theta}{\cos\alpha}\right)^2 \tag{11}$$

即斜面上水迹形状还是一个圆,不过比平面的水迹半径大,半径之比是 $1:\cos\alpha$.

第三个例子是弹性小球在斜面上各个落点前后长度问题. 依据问题特性,小球反弹前后垂直斜面方向的速度大小不变,方向相反,以斜面为"水平面",平行斜面的两个相互垂直方向为 x' 和 y' 方向,垂直斜面向上为 z' 方向. 在新参考系下,重力加速度为

$$\boldsymbol{g} = g(0, \sin\alpha, -\cos\alpha)$$

其中 α 是斜面与地面的夹角. 弹性小球起始点在原点,出射速度在新坐标系下是

$$\boldsymbol{v}_0 = (v_1, v_2, v_3)$$

那么第一次小球空中轨迹方程是

$$\begin{aligned} x' &= v_1 t \\ y' &= v_2 t + \frac{gt^2\sin\alpha}{2} \\ z' &= v_3 t - \frac{gt^2\cos\alpha}{2} \end{aligned} \tag{12}$$

小球弹跳前后速度大小不变,垂直斜面加速度大小不变,所以小球在空中的弹跳时间,每一段相等. 当小球第 n 次落在斜面上时,时间为

$$t_n = \frac{2nv_3}{g\cos\alpha}$$

小球弹跳前后平行斜面的速度不变,平行斜面的加速度不变,所以平行斜面的坐标可以继续采用式(12)的表示. 把落点时间代入,计算得到第 n 次的落点坐标为

$$\begin{aligned} x'_n &= \frac{2nv_3 v_1}{g\cos\alpha} \\ y'_n &= \frac{2nv_3(v_2 + nv_3\tan\alpha)}{g\cos\alpha} \end{aligned} \tag{13}$$

由式(13)可以计算得到第 n 个落点与第 $n-1$ 个落点的距离为

$$D_n = \frac{2v_3}{g\cos\alpha}\sqrt{v_1^2 + [v_2 + (2n-1)v_3\tan\alpha]^2} \tag{14}$$

由此可见,采用合适的三维坐标系,可以方便解决各种三维抛体问题.

参 考 文 献

1 陈超群. 当平抛遇上斜面. 中学物理,2012,30(17):56 ~ 57

2 朱加沐. 当平抛运动约会了曲面. 物理教学,2013,35(10):58 ~ 59

3 陈玉奇. 斜面约束下斜抛运动的分析方法. 物理教学,2015,37(1):71 ~ 74

4 许小涛. 由一道自主招生试题谈斜抛运动的几种解. 物理教学,2015,37(4):67

Three Dimensional Projectile Questions

Zhang Meng'an

(Zhejiang Wuxing High School, Zhejiang, Huzhou 313000)

Qiu Weigang

(School of Science, Huzhou Teacher's College, Zhejiang, Huzhou 313000)

Abstract: The trajectories, impact points and initial conditions of three dimensional projectiles are derived from different representations of three dimensional coordinates, which depend on different kinds of problems.

Key words: three dimension; projectile; three dimensional coordinates