两球同处先后落 相碰反弹升多高

郑　金

(凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500)

(收稿日期:2017-02-03)

摘　要:通过对一道有关两个小球在竖直方向发生弹性碰撞的高考题进行拓展解答来归纳物理结论,并灵活利用结论巧妙解答一类有关竖直方向的弹性碰撞问题,而且还指出一种常见的错误解法.

关键词:自由落体　弹性碰撞　最大高度　物理结论

对有关两个小球在同一竖直线上以大小相等、方向相反的速度发生弹性碰撞而弹起的最大高度问题,若根据动量守恒定律和机械能守恒定律列方程解答则比较麻烦.而直接利用物理结论解答则很简捷.下面以一道高考题为例,对所得结果进行拓展,即通过改变两球的质量关系或碰撞点位置来求解最大高度的极值,由此归纳出结论并进行灵活应用.

1　结论推导

【原题】(2010 年高考全国卷 Ⅱ)小球 A 和 B 的质量分别为 m_A 和 m_B,且 $m_A > m_B$.在某高度处将 A 和 B 先后从静止释放.小球 A 与水平地面碰撞后向上弹回,在释放处下方与释放处距离为 H 的地方恰好与正在下落的小球 B 发生正碰.设所有碰撞都是弹性的,碰撞时间极短.求小球 A 和 B 碰撞后 B 上升的最大高度.

解析:如图 1 所示,两球碰撞前瞬时,球 A 的速度向上,B 的速度向下.由于二者是在同一高度处释放,而所有碰撞是弹性的,则由机械能守恒定律可知,小球 A 与 B 碰撞前瞬时的速率相等,设为 v_0,则有

$$m_B gH = \frac{1}{2} m_B v_0^2 \tag{1}$$

设球 A 与 B 碰撞后的速度分别为 v_1 和 v_2,碰撞后球 B 的速度是向上的,以竖直向上为正方向,由动量守恒定律和机械能守恒定律分别有

$$m_A v_0 - m_B v_0 = m_A v_1 + m_B v_2 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 + \frac{1}{2} m_B v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_1^2 + \frac{1}{2} m_B v_2^2 \tag{3}$$

联立式(2)、(3)得

$$v_2 = \frac{3m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0 \tag{4}$$

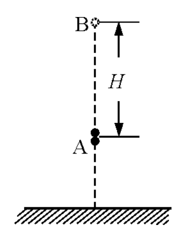

图 1　两球相碰位置示意图

设球 B 从碰撞位置上升的最大高度为 h,由运动学公式有

$$v_2^2 = 2gh \tag{5}$$

利用式(1)、(4)、(5)得

$$h = \left(\frac{3m_A - m_B}{m_A + m_B}\right)^2 H \tag{6}$$

拓展:(1)如果碰撞后小球 A 的速度突然变为零,那么小球 B 上升的最大高度为多少?(2)两球的质量满足什么关系时,可使小球 B 上升的最大高度有极大值?(3)两球 A 和 B 在何处碰撞可使小球 B 上升的最大高度有极大值?

解析:(1)如果碰撞后小球 A 的速度突然变为零,那么球 B 的速度是向上的,对式(2)、(3)取 $v_1 =$

0,联立方程可得

$$v_2 = 2v_0$$

利用运动学公式有

$$v_0^2 = 2gH$$

$$v_2^2 = 2gh$$

可知小球 B 从碰撞位置上升的最大高度 $h = 4H$.

由式(2) 可得质量大小关系为

$$m_A = 3m_B$$

代入式(6) 得

$$h = 4H$$

(2) 对于式(6),令$\frac{m_A}{m_B} = k$,则小球 B 上升的最大高度

$$h = \left(\frac{3k-1}{k+1}\right)^2 H = \left(3 - \frac{4}{k+1}\right)^2 H$$

由此可知,k 越大,h 就越大.当 $k \to \infty$ 时,即当 $m_A \gg m_B$ 时,$h_{\max} \approx 9H$.

(3) 若两个小球不同时下落,则先后下落的时间间隔越短,碰撞点就越低,到释放点的距离 H 就越大,那么根据式(6),球 B 上升的高度 h 就越大,因此当二者同时下落时,碰撞点最低,H 值最大,所以球 B 弹起后上升的高度有极大值.

可见,直接利用式(6) 解题可化繁为简.

结论:对于从水平地面上方同一位置先后自由下落的两个小球 m_1 和 m_2($m_1 > m_2$),若相碰位置到释放位置的高度为 H,则上方小球从碰撞位置弹起的最大高度为

$$h = \left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 H$$

若下方小球与上方小球的质量之比越大,则上方小球弹起的高度就越大,当 $m_1 \gg m_2$ 时,$h_{\max} \approx 9H$;若两球同时下落,则上述 h 值最大.

2 结论应用

直接利用上述结论解答类似的问题比较简单,可避免根据动量守恒定律和机械能守恒定律列方程以及解方程组的麻烦.

【例 1】在离地面高度为 H_0 处,有一质量为 m_1 的小球 1,在其正下方地面处有另一小球 2.令小球 1 从静止开始下落,同时令小球 2 以某一初速度竖直上抛,使上、下两球在空中相碰,相碰处离地面的高度为小球 1 下落前高度的$\frac{3}{4}$.碰撞时间极短,且不损失机械能.假如小球 2 的质量 m 可以取 $m = m_1, 2m_1, 3m_1, \cdots, 9m_1$,要想碰后小球 1 上升的高度最大,试论证上抛小球的质量应为多少.

解析:设小球 2 上升运动的初速度为 v_0,经历时间 t 相遇,由于二者加速度相同,因此相对加速度为零,即一个小球相对于另一个小球做匀速直线运动,相对速度为 v_0,相对位移为 H_0,所以相对运动经历的时间 $t = \frac{H_0}{v_0}$.由题意知自由落体运动的位移

$$y = \frac{1}{4} H_0$$

而

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

可得

$$v_0 = \sqrt{2gH_0}$$

设小球 1 和 2 碰撞前瞬时的速度分别为 v_1 和 v_2,则有

$$v_1 = gt \qquad v_2 = v_0 - gt$$

即

$$v_1 = \sqrt{\frac{gH_0}{2}} = \frac{v_0}{2}$$

$$v_2 = v_0 - \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}$$

由于两球相碰前的瞬时速度大小相等,方向相反,因此可等效为两个小球从同一高度处先后自由下落,质量较大的球与水平地面发生弹性碰撞后弹起再与质量较小的球发生弹性碰撞.由题意可知从释放点到碰撞点的高度为

$$H = H_0 - \frac{3}{4} H_0 = \frac{H_0}{4}$$

设

$$\frac{m_1}{m} = \lambda$$

则相碰后上方小球从碰撞点上升的最大高度

$$h=\left(\frac{3m-m_1}{m+m_1}\right)^2 H=\left(\frac{3-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 \frac{H_0}{4}$$

这表明，两球的质量相差越悬殊，比值$\frac{m_1}{m}=\lambda$就越小，h 值就越大.

因此当 $m=9m_1$ 时，球 1 上升的高度最大，最大值为

$$h_{\max}=\left(\frac{26}{10}\right)^2 \frac{H_0}{4}=1.69H_0$$

点评：该题之所以能利用结论解答，是因为在题中设置了条件“相碰处离地面的高度为小球 1 下落前高度的$\frac{3}{4}$”，如果不满足这个条件，则相碰前瞬时二者的速率不相等，那么就不能等效于两球从同一高度处先后下落的问题了.

对于该题，还有一种错误的解法，即认为碰撞后下方小球的速度立即为零时，把全部能量都给了上方小球，则上方小球被弹起的最大高度 $h=4H$，可得二者的质量关系为 $m=3m_1$.

【例 2】有两个钢球，密度相同，其中小球的半径为 a，大球的半径为 $2a$，小球置于大球顶上，开始时大球的球心到水平钢板平台的高度为 h_0，如图 2 所示. 若两球从静止开始下落，假设两球心始终在同一竖直线上，而且所有的碰撞都是弹性的，求碰撞后小球将达到的最大高度(球心到钢板平台的距离).

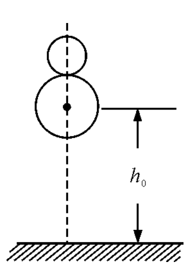

图 2　例 2 题图

解析：大球与钢板碰撞后反弹，再与小球相碰，由于二者一起下落，则相碰时的速度大小相等，那么由结论可知小球从碰撞位置上升的最大高度为

$$h=\left(\frac{3m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 H$$

由公式 $m=\rho V$ 和球体积公式可知 $M=8m$. 两球同时下落，当大球接触钢板时两球发生弹性碰撞，可知上方小球自由下落的距离等于二者一起下落的距离，即 $H=h_0-2a$，因此小球从碰撞点上升的最大高度 h 可表示为

$$h=\left(\frac{23}{9}\right)^2 (h_0-2a)$$

所以小球上升的最高点到钢板的距离

$$d=h+5a\approx 6.5h_0-8a$$

点评：当两球上下叠放同时下落时，只有当下方球与钢板碰撞反弹时，两球才发生碰撞，由此来确定上方小球自由下落的距离，等于两球一起下落的距离，即为下方球面的最低点到钢板的距离，而不是球心到钢板的距离. 虽然两球不在同一位置释放，但在一起下落，若不是在一起下落，则二者相碰时的速度大小不相等，那么结论不适用.

对于两道例题，尽管两球不在同一高度处自由下落，但仍可利用结论来解答. 要注意结论的适用条件，包括 3 方面：

其一，两球正碰前的瞬时速率相等，这就要求半径忽略不计，且在同一位置释放，但不一定同时释放，若半径不能忽略，则须两球上下叠放同时释放，即二者一起下落；

其二，所有碰撞都是弹性的；

其三，位于上方小球的质量较小.

还要注意结论式中各距离的含义，其中 H 是指相碰位置到释放位置的距离，实际是上方小球自由下落的距离；而 h 是指上方小球竖直上抛运动的最大位移. 该结论适宜解答选择题和填空题，而对于高考题中的论述计算题，要慎用结论，但可借助结论来检验常规解法所得结果是否正确.

参 考 文 献

1　郭信平. 这道高考题还可以再灵活些. 物理教师，2011，32(7)：封三

2　赵坚，丁强. 难以割舍的高考“碰撞情”. 中学物理教学参考，2010，39(12)：42 ～ 43