

一道高校自主招生试题的参考答案疑点与剖析

黄绍书

(六盘水市第23中学 贵州 六盘水 553000)

蒋金团

(施甸县第一中学 云南 保山 678200)

(收稿日期:2017-02-06)

摘要:详细分析了2015年中国科学技术大学自主招生选拔考试物理试题第4题,指出其参考答案存在的两个疑点,并对该试题的解答进行深度剖析。

关键词:高校 自主招生 物理试题 参考答案 剖析

1 问题的提出

【题目】两个带电小球A和B,所带电荷量相同,符号相反,质量分别是 m 和 $2m$.初始时刻,它们间距为 d ,小球B静止,小球A沿着与两者连线相垂直的方向以速度 v 运动,如图1所示.随后,它们多次处于相距 $3d$ 的位置上.求小球所带电荷量.

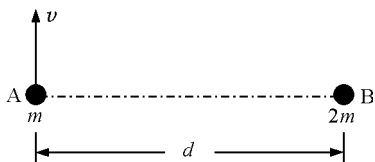


图1 题图

这是2015年中国科学技术大学自主招生选拔考试物理试题第4题,其参考答案如下。

解析:两个小球组成的系统不受外力,故质心做匀速直线运动,质心的速度为 $v_c = \frac{v}{3}$,以质心为惯性参照系,两个质点的初速度分别为 $\frac{2}{3}v$ 和 $\frac{v}{3}$,方向相反,如图2所示。

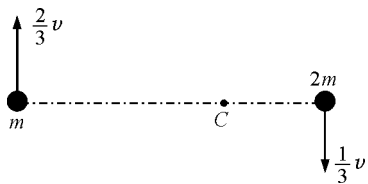


图2 两个质点的速度分析

当带电荷量 q 过小时,两球将相距无穷远.根据能量守恒定律,有

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m\left(\frac{1}{3}v\right)^2 - k\frac{q^2}{d} < 0 \quad (1)$$

式中零表示两球恰好相距无穷远时的能量,解得

$$q > \sqrt{\frac{mv^2 d}{3k}} \quad (2)$$

当带电荷量 q 过大时,两球将相距小于 $3d$.根据角动量守恒定律和能量守恒定律,有

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m\left(\frac{1}{3}v\right)^2 - k\frac{q^2}{d} \geq \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{9}v\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m\left(\frac{1}{9}v\right)^2 - k\frac{q^2}{3d} \quad (3)$$

因为末状态两球连线方向可能有速度,右端未计入此部分动能,所以取“ \geq ”号.解得

$$q \leq \sqrt{\frac{4mv^2 d}{9k}} \quad (4)$$

所以,小球所带的电荷量满足

$$\sqrt{\frac{mv^2 d}{3k}} < q \leq \sqrt{\frac{4mv^2 d}{9k}} \quad (5)$$

2 答案的疑点

这道试题的参考答案存在两个疑点,令人费解。

疑点1:答案中“带电荷量 q 过小时,两球将相距无穷远”的说法是没有道理的,由此得出的式(1)、(2)当然也是站不住脚的.并且,相距无穷远与式

(1) 是自相矛盾的.

疑点 2: 答案中“带电荷量 q 过大时, 两球将相距小于 $3d$ ”同样没有依据, 由此给出的式(3)、(4)也就存在模糊感. 因为, 系统的相对运动规律或相对运动模型不明确.

3 问题的剖析

根据两小球之间的相对距离多次出现在 $3d$ 位置, 可以说明系统是做周期性运动. 因此, 小球或系统在平方反比的库仑引力作用下将做椭圆轨道运动, 运动过程中两小球的远点相对距离 $d_m \geq 3d$. 为此, 我们将试题分两种情况进行剖析.

(1) 若 B 固定, 那么, A 绕 B 做椭圆轨道运动. 这时 B 处于轨道的一个焦点上, 轨道的拱点距离分别为 d 和 d_m ($d_m \geq 3d$), 如图 3 所示. 根据角动量守恒定律和能量守恒定律, 有

$$\frac{1}{2}mv^2 - k\frac{q^2}{d} \geq \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v\right)^2 - k\frac{q^2}{3d} \quad (6)$$

所以

$$q \leq \sqrt{\frac{2mv^2d}{3k}} \quad (7)$$

当 $d_m = 3d$ 时, 式(6)、(7)中取“=”号.

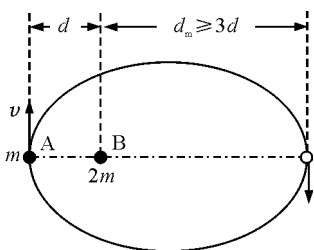


图 3 B 固定, A 绕 B 做椭圆轨道分析

(2) 若 B 不固定, 那么, 系统的质心以速度 $v_c = \frac{v}{3}$ 做匀速直线运动, 两小球均绕系统质心做同步椭圆轨道运动, 质心处于两个椭圆轨道的一个共同焦点上, 两小球之间的近点距离与远点距离分别为 d 和 d_m ($d_m \geq 3d$), 如图 4 所示.

以质心为惯性参照系, 两个小球的初速度即近点速度分别为 $\frac{2}{3}v$ 和 $\frac{v}{3}$, 方向相反. 根据角动量守恒定律和能量守恒定律, 有

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m\left(\frac{1}{3}v\right)^2 - k\frac{q^2}{d} \geq \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{9}v\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m\left(\frac{1}{9}v\right)^2 - k\frac{q^2}{3d} \quad (8)$$

因此

$$q \leq \sqrt{\frac{4mv^2d}{9k}} \quad (9)$$

当 $d_m = 3d$ 时, 式(8)、(9)中取“=”号.

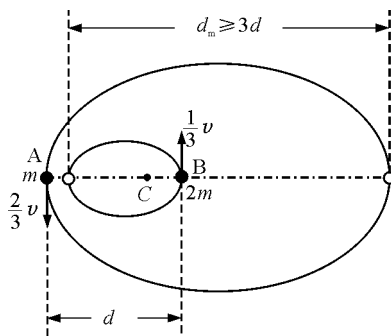


图 4 B 不固定, 对 A, B 的运动分析

4 讨论与说明

(1) 关于小球所带电荷量, 根据初始条件是可以唯一确定的, 不存在电荷量过小或电荷量过大的问题.

(2) 当小球不在椭圆轨道的拱点位置时, 径向速度不为零. 式(6)~(9)中的速度均为切向速度, 没有计入径向速度.

(3) 如果运动过程中两小球之间的相对远点距离 $d_m > 3d$, 那么它们之间的相对距离为 $3d$ 时的速度方向跟它们的连线是不垂直的, 两球连线方向有径向速度. 因此, 式(6)~(9)中取“ \geq ”号.

(4) 比较式(3)和式(8), 参考答案已经直接或间接应用了图 4 所示的运动模型, 但(3)的说理是不清楚的.

(5) 宇宙中一些双星系统的运动规律与本文试题中两小球组成系统的图 4 所示模型是完全类似的.

参考文献

- 2015 年中国科学技术大学自主选拔能力测试物理探究试题及参考答案
- 漆安慎, 杜婵英. 力学. 北京: 高等教育出版社, 2005. 167 ~ 178