



## 飞船喷气变轨时需要消耗多少能量

李永乐

(中国人民大学附属中学 北京 100080)

(收稿日期:2017-02-19)

**摘要:**从一道物理竞赛问题出发,研究讨论飞船脱离地球引力所需要的能量大小、飞船喷气变轨时消耗燃料能量大小以及飞船与气体获得的机械能之间的关系.

**关键词:**飞船变轨 能量 燃料 物理竞赛 内力做功 质心系

在第十五届北京市高中力学竞赛中有这样一个题目.

**【例题】**一个人造飞船绕地球以椭圆轨道运行,椭圆的焦点是地心.为了增加能量使飞船逃逸地球,飞船可以通过短暂的点火,使自己的速度增加 $\Delta v$ ,问应该在轨道何处,沿什么方向上增加 $\Delta v$ ,会使得 $\Delta v$ 最小?说明原因.

**解析:**使飞船点火后速度变化 $\Delta v$ ,应使飞船获得最大机械能增量 $\Delta E$ .由于飞船发生短时间喷气,喷气前后飞船引力势能不变,因此飞船动能增量为

$$\Delta E = \Delta E_k = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = m\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}m(\Delta\mathbf{v})^2 \quad (1)$$

由于 $\Delta\mathbf{v}$ 是一个小量,因此式(1)中第一部分是主要部分.在 $\Delta\mathbf{v}$ 大小一定时,要使 $\Delta E$ 最大,就要让 $\mathbf{v}$ 最大,同时 $\mathbf{v}$ 与 $\Delta\mathbf{v}$ 同向,即在近地点使飞船沿着原来运动方向获得 $\Delta\mathbf{v}$ 时,可使得飞船逃逸且 $\Delta\mathbf{v}$ 最小.

笔者在教学过程中发现,在这个问题的解决中,学生还有以下3个疑问:

由题可知

$$O'Q = R \quad OQ = L \quad O'O = R - r$$

对引出轨迹圆弧

$$B'qv = m \frac{v^2}{R}$$

对 $\triangle OO'Q$ ,由余弦定理得

$$R = \frac{r^2 + L^2 - 2rR \cos \theta}{2r - 2L \cos \theta}$$

解得

$$B' = \frac{mv}{qR} = \frac{mv(2r - 2L \cos \theta)}{q(r^2 + L^2 - 2rR \cos \theta)}$$

### 3.5 结论包

$$B' = \frac{mv}{qR} = \frac{mv(2r - 2L \cos \theta)}{q(r^2 + L^2 - 2rR \cos \theta)}$$

结论包的单独列出是因有些学生不需讲解分析已能独立完成,则从结论包中核对一下答案即可.

### 4 结束语

习题教学不是简单地让学生模仿依样画葫芦,

更重要的是培养学生的思维能力,微资源包的开发和利用,能让学习者投入到分析、比较、对比、归纳等一系列高阶思维活动中来.实践证明,微资源包导学对培养学生的高阶思维,提升学生的习题解题能力是行之有效的.

### 参考文献

- 1 傅竹伟.在高中物理教学中促进学生深度学习的策略探究.物理教师,2014(4):6~7
- 2 方拥香.基于微课的导学模式设计研究.教学与管理,2015(2):106~109
- 3 许云.多种习题教学模式的构建与实施.物理通报,2012(7):17~20
- 4 王师.国外高阶思维及其教学方式.上海教育科研,2011(9):31~34
- 5 李贵安.中学物理教学中高阶思维能力的培养探究.物理教师,2015(8):2~4

(1) 在不同位置脱离地球时,飞船所需获得的机械能增量  $\Delta E$  是否相同?

(2) 飞船在喷出气体时所消耗燃料的能量与飞船速度增量  $\Delta v$  什么关系?

(3) 为何飞船获得同样的速度增量  $\Delta v$ ,机械能的增量  $\Delta E$  却不相同?

本文对这3个问题依次进行解答.

## 1 飞船在同一轨道不同位置脱离地球时所需能量相同

飞船在半径为  $r$  的圆轨道上环绕地球运动时,机械能守恒,机械能大小为<sup>[1]</sup>

$$E = E_k + E_p = -\frac{GMm}{2r} \quad (2)$$

其中  $G$  为万有引力常量,  $M$  为地球质量,  $m$  为飞船质量.

飞船绕半长轴为  $a$  的椭圆轨道运行时,机械能守恒,机械能大小为<sup>[2]</sup>

$$E = E_k + E_p = -\frac{GMm}{2a} \quad (3)$$

在地球参考系下,若喷气后飞船刚好脱离地球,到达无穷远处时飞船的动能和势能都为零,根据脱离过程机械能守恒,喷气后瞬间飞船的机械能也要为零. 喷气过程飞船需要获得的机械能增加为

$$\Delta E = 0 - \left(-G\frac{Mm}{2a}\right) = G\frac{Mm}{2a} \quad (4)$$

即确定轨道上的飞船要脱离地球到达无穷远处,所需要获得的能量增加与地球质量  $M$ ,飞船的质量  $m$  以及轨道半长轴  $a$  有关,而与在何处加速无关.

## 2 燃料消耗的化学能与飞船速度增量成正比

燃料燃烧时消耗化学能产生的推力使飞船加速,同时使气体向后喷出,因此,燃料消耗的化学能既要对飞船做功,同时也要对喷出的气体做功. 消耗化学能  $Q$  可以根据动能定理得到

$$Q = W_{\text{对飞船}} + W_{\text{对气体}} = \Delta E_{\text{飞船}} + \Delta E_{\text{气体}} \quad (5)$$

由于动能具有相对性,相对于不同参考系,飞船和气体动能增量都是不同的. 取飞船及燃料的质心为参考系,研究喷气过程.

设飞船原来的质量为  $m$ ,在短时间内以相对于飞船的速度  $u$  喷出少量气体  $\Delta m$  ( $\Delta m \ll m$ ). 在质心系下,飞船速度从零变为  $\Delta v$  ( $\Delta v \ll u$ ),气体速度从

零变为  $u - \Delta v$ ,且与飞船反向,如图1所示.

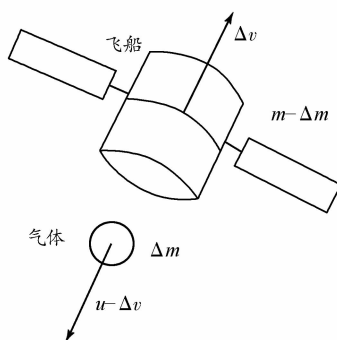


图1 质心系下飞船喷气时的速度和质量变化

根据动量守恒,有

$$0 = (m - \Delta m)\Delta v - \Delta m(u - \Delta v) \quad (6)$$

由于  $\Delta m \ll m$ ,  $\Delta v \ll u$ ,将式(6)中的二阶小量舍去,简化为

$$m\Delta v = \Delta mu \quad (7)$$

同样,在舍去二阶小量时,飞船和气体获得的动能增量分别为

$$\Delta E_{\text{飞船}} = \frac{1}{2}m(\Delta v)^2 \quad (8)$$

$$\Delta E_{\text{气体}} = \frac{1}{2}\Delta mu^2$$

燃料对飞船和对气体做功之比为

$$\frac{W_{\text{飞船}}}{W_{\text{气体}}} = \frac{\Delta E_{\text{飞船}}}{\Delta E_{\text{气体}}} = \frac{m(\Delta v)^2}{\Delta mu^2} \quad (9)$$

将式(7)代入式(9)得到

$$\frac{W_{\text{飞船}}}{W_{\text{气体}}} = \frac{\Delta v}{u} = \frac{\Delta m}{m} \quad (10)$$

由于  $\Delta m \ll m$ ,  $\Delta v \ll u$ ,得到  $W_{\text{飞船}} \ll W_{\text{气体}}$ ,即质心系下,燃料做功绝大多数都转化为气体的动能.

这是一个普遍结论:质心系下一对内力对两个物体做功与两物体的质量成反比,如果质量相差悬殊,内力做功约等于对质量小的物体做功<sup>[3]</sup>.

于是,消耗燃料能量

$$Q = W_{\text{气体}} = \Delta E_{\text{气体}} = \frac{1}{2}\Delta mu^2 \quad (11)$$

将式(7)代入式(11),可以得到

$$Q = \frac{1}{2}mu\Delta v \quad (12)$$

即在飞船质量  $m$  和喷气速度  $u$  一定的情况下,消耗燃料能量  $Q$  与飞船速度增量  $\Delta v$  成正比. 在本题中,近地点喷气时飞船速度增量  $\Delta v$  最小,就代表了消耗

的燃料能量  $Q$  最少,这也是本题的实际意义所在.

采用折合质量的方法可以更方便地得到上述结论.

在二体问题中,若存在两个物体,质量为  $m_1$  和  $m_2$ ,则系统质心系下的能量可以按照下列方法计算<sup>[4]</sup>

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{\text{相}}^2 + U(r) \quad (13)$$

其中

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

表示折合质量, $U(r)$  表示系统势能.

在本题中,质心系下飞船和气体的初动能为零,后来系统分裂为  $m - \Delta m$  和  $\Delta m$  两个部分,二者相对速度为  $u$ ,于是燃料的消耗等于系统动能增量

$$Q = \Delta E_k = \frac{1}{2} \times \frac{(m - \Delta m)\Delta m}{m} u^2 \quad (14)$$

根据  $\Delta m \ll m$ ,可以将式(14)近似为式(11),也可以得到相同的结论.

### 3 在不同位置喷气时 燃料能量在飞船和气体间的分配不同

在地球参考系下,燃料消耗能量依然等于对飞船和气体做功之和,即

$$Q = W'_{\text{对飞船}} + W'_{\text{对气体}} = \Delta E'_{\text{飞船}} + \Delta E'_{\text{气体}} \quad (15)$$

由于做功和动能具有相对性,相对于地面参考系,燃料对飞船做功、对气体做功、飞船动能增量和气体动能增量都已经与质心系下的情况不同.但是,一对相互作用力对两物体做功的和与参考系无关,只与内力大小和相对位移有关<sup>[5]</sup>.因此,即便在地面参考系下看,在飞船获得速度增量的过程中,燃

料的消耗  $Q$  依然满足式(12)的结论.

只是,由于地面不是飞船和喷出气体的质心,能量在飞船和气体之间的分配关系不再满足式(10)的结论.在地面参考系下,飞船在轨道不同位置向不同方向喷气时,燃料能量在飞船和气体之间的分配不同.根据式(1)的计算,在近地点朝飞船原来的运动方向喷气时,飞船能够获得最大的动能增量,因而也最容易飞离地球.

## 4 结论

要从某一轨道脱离地球引力,飞船需要获得一定的机械能增量.在椭圆轨道不同位置向不同方向喷气时,获得相同的速度增量  $\Delta v$  所消耗的能量  $Q$  是相同的,但是这个能量需要在飞船和气体之间进行分配.不同位置时,能量的分配关系不同.如果飞船在近地点朝着飞船原来运动的方向加速,消耗燃料分配到飞船上的功最多,此时飞船的速度增量最小,也最容易飞离地球.

### 参考文献

- 1 姚黄涛,冯杰.浅析卫星变轨运动.物理通报,2016(6): 48~50
- 2 周洪松,张国光.比较天体运行轨道间的机械能.物理教师,2015,36(11):72~72
- 3 郑永令,贾起民.力学.北京:高等教育出版社,2002. 146~148
- 4 郑永令.二体问题与折合质量.物理教学,2011,33(1): 5~8
- 5 王永昌.对一对内力做功的讨论.中学物理教学参考,2010,39(4):26~27

# How Much Energy Is Consumed during Airship Varies Its Orbit by Jetting Gas?

Li Yongle

(The High School Affiliated to Renmin University of China, Beijing 100080)

**Abstract:** In This paper, we calculates the energy consumption of orbital transfer, and also discusses the relationship between the spacecraft's mechanical energy and the fuel consumption.

**Key words:** orbital transfer; energy; fuel; physics Olympiad; work of internal forces; center of mass system