

## 追本朔源——静电平衡法再探 2013 年高考 安徽理综第 20 题

许 龙

(太和县第一中学 安徽 阜阳 236600)

辛淑媛

(太和中学 安徽 阜阳 236600)

(收稿日期:2017-02-20)

**摘 要:**对 2013 年高考安徽理综卷其中一道关于静电场的物理试题进行了分析,针对不同考试用不同方法做一研究,同时用大学物理的相关内容从微观角度分析该静电场形成的原因.

**关键词:**静电平衡 安徽理综 电磁学 积分

自 2008 年开始,安徽高考开始进行自主命题,尽管 2016 年命题权被教育部收回,但纵观近几年的安徽理综卷,尤其是物理部分可谓是好题不断,精彩纷呈,有些题目源自大学物理,同时又能用高中知识进行解答,在分析问题时可对不同水平的考生都有所启发.

尤其是 2013 年的第 20 题——选择题的最后一题,对这道题不同层次的学生有不同的解法.下面笔者就简单分析这道试题,同时用大学物理的静电感应方法探究一下导体表面感应电荷的分布特点.

**【题目】**(2013 年高考安徽理综卷第 20 题)如图 1 所示, $xOy$  平面是无穷大导体的表面,该导体充满  $z < 0$  的空间, $z > 0$  的空间为真空.将电荷量为  $q$  的点电荷置于  $z$  轴上  $z = h$  处,则在  $xOy$  平面上会产生感应电荷.空间任意一点处的电场皆是由点电荷  $q$  和导体表面上的感应电荷共同激发的.已知静电平衡时导体内部场强处处为零,则在  $z$  轴上  $z = \frac{h}{2}$  处的场强大小为( $k$  为静电力常量)( )

- A.  $k \frac{4q}{h^2}$                       B.  $k \frac{4q}{9h^2}$   
C.  $k \frac{32q}{9h^2}$                       D.  $k \frac{40q}{9h^2}$

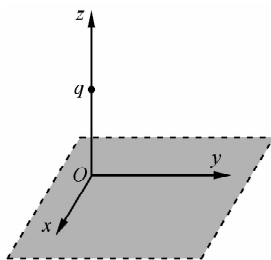


图 1 点电荷与无穷大导体表面距离中点的场强计算

**解析:**该题看似比较抽象,分析后发现该题亦可用高中知识进行解答,下面笔者通过以下几种方法进行解答.

### 1 普通考生——比较法

空间电场是由源电荷激发的电场和感应电荷激发电场的矢量和.由静电感应可知,源电荷激发的电场和感应电场在平板上方的场强方向相同,故在  $z = \frac{h}{2}$  点的合场强应大于源电荷在此形成的场强.源电荷  $q$  在此的电场强度为

$$E = k \frac{q}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} = k \frac{4q}{h^2}$$

由选项比较可知,大于该场强的只有 D 选项,所以正确答案为 D.

**作者简介:**许龙(1989- ),男,中教二级,主要从事中学数学教学及研究.

**通讯作者:**辛淑媛(1989- ),女,中教二级,主要从事中学数学教学及研究.

## 2 优秀考生——镜像对称法

该电场相当于等量异种电荷产生的电场的一半,如图2所示,所以可以用位于 $z=-h$ 的镜像电荷 $-q$ 代替导体表面上的感应电荷,下边界条件维持不变,即 $xOy$ 平面为零势面,在 $z$ 轴上 $z=\frac{h}{2}$ 处, $q$ 的场强大小为

$$E_1 = k \frac{q}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$-q$ 在该点产生的场强大小为

$$E_2 = k \frac{q}{\left(h + \frac{h}{2}\right)^2} = k \frac{4q}{9h^2}$$

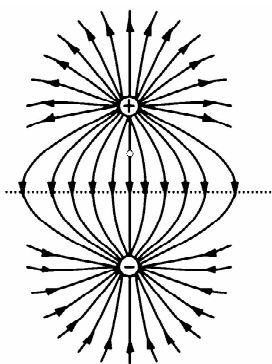


图2 等量异种电荷电场线分布

两电荷在该处产生的场强方向相同,则合场强为

$$E_{\text{合}} = E_1 + E_2 = k \frac{4q}{9h^2} + k \frac{q}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} = k \frac{40q}{9h^2}$$

依然选择D选项.

## 3 大学生——静电平衡法

若是大学生看待这道试题,可用微观方法分析,需要用到大学物理中电磁学的一些内容,尤其是高斯定理和高等数学的积分知识.

可设电荷 $q$ 为正电荷,无限大金属板接地使下边电荷量为零,整个金属板,只有上表面有电荷,如图3所示.金属板上表面上任意一点 $M$ ,点 $M$ 和点 $O$ 之间的距离为 $x$ ,取金属板内接近 $M$ 点的点 $N$ ,取一包含 $MN$ 两点的面积元 $\Delta S$ ,其包含电荷量为 $q'$ .

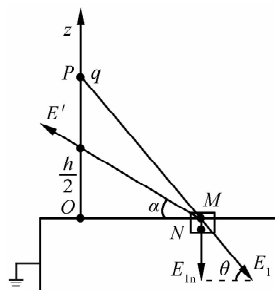


图3 静电平衡的无限大接地金属板内的场强

### 3.1 N点场强的构成

导体内场强由两部分叠加而成:源电荷激发的电场和感应电荷在此激发的电场.

#### 3.1.1 源电荷在此形成电场

源电荷在 $M$ 点的场强为

$$E_1 = k \frac{q}{r^2}$$

其中 $r^2 = h^2 + x^2$ ,所以

$$E_1 = k \frac{q}{h^2 + x^2}$$

方向沿着 $PM$ 方向,由于 $MN$ 极近,所以 $q$ 在 $M$ 点场强跟 $N$ 点场强相同.为了方便计算,取该点场强的法向分量

$$E_{1n} = E_1 \sin \theta$$

其中

$$\sin \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

可得此时在 $N$ 点垂直于平面向里的场强为

$$E_{1n} = k \frac{qh}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

#### 3.1.2 面元 $\Delta S$ 上的电荷 $q'$ 激发电场

当把金属板看成无限大平面时,可用高斯定理进行求解,在面元 $\Delta S$ 两侧场强应满足

$$E_{2n} \cdot 2\Delta S = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

可得

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

其中 $\sigma = \frac{q'}{\Delta S}$ ,表示电荷密度:单位面积内所包含的电荷量.

虽然除了面元 $\Delta S$ 之外的感应电荷也会在 $N$ 点激发电场,但这个方向不是在金属板的法向上,而与板面相切,在法向场强没有影响.所以,在 $N$ 点的法向方向总场强为

$$E_n = E_{1n} + E_{2n} = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## 3.2 N点合场强

由于N点在导体内部,其总场强为零,法向场强亦为零,所以应满足

$$\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$$

因此,可得导体表面感应电荷的面密度为

$$\sigma = -\frac{qh}{2\pi(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

负号表示感应电荷的电性与源电荷电性相反.由电荷密度表达式很明显可以看出:在金属平板上离源电荷正对位置的O点越远,电荷密度越小.

3.3 在 $z=\frac{h}{2}$ 点场强

在 $z=\frac{h}{2}$ 处场强由两部分构成,感应电荷在此的电场和源电荷在此形成电场的矢量和,如图4所示.

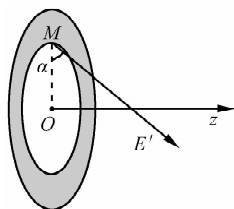


图4 无限大圆盘轴线上电场强度

## 3.3.1 感应电荷的电场强度

无限大金属板的感应电荷在 $z=\frac{h}{2}$ 的场强应由积分求得,M点的感应电荷在 $z=\frac{h}{2}$ 的场强为

$$dE' = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

其中

$$r'^2 = x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

以O为圆心,半径为x,宽为dx的面元 $dS = 2\pi x dx$ .

由于无限大金属板的对称性,感应电荷在此形成的合场强应为沿着轴线方向,即

$$dE'_n = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \sin \alpha$$

其中

$$\sin \alpha = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}$$

所以

$$\begin{aligned} dE'_n &= \frac{\sigma h dS}{8\pi\epsilon_0 \left[x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{qh}{8\pi\epsilon_0 \left[x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \frac{h 2\pi x}{2\pi(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ E'_n &= -\frac{qh^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{x}{\left[x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} (x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} dx \end{aligned}$$

可得

$$E'_n = -\frac{qh^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{8}{9h^4} = -\frac{q}{9\pi\epsilon_0 h^2}$$

## 3.3.2 源电荷形成电场

源电荷在 $z=\frac{h}{2}$ 的场强大小为

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 h^2}$$

方向指向z轴负方向,即场强为

$$E'_1 = -\frac{q}{\pi\epsilon_0 h^2}$$

感应电荷和源电荷在此形成的合场强为

$$\begin{aligned} E_{\text{合}} &= E'_n + E'_1 = \\ &= -\frac{q}{9\pi\epsilon_0 h^2} - \frac{q}{\pi\epsilon_0 h^2} = -\frac{10q}{9\pi\epsilon_0 h^2} \end{aligned}$$

方向指向z轴负方向.将 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 代入上式后其合场强大小也就是题目的D选项.

用大学物理的分析方法和高等数学的积分方法更能探究这个问题的本质,能从微观上分析感应电场形成的由来,这样的分析方法可以对一些参加自主招生考试的学生起到指导作用.

补充:其实在算得导体表面的电荷面密度后,也能算得其表面的电荷量,依然采用高等数学的积分方法

$$dq_{\text{感}} = \sigma dS$$

$$dS = 2\pi x dx$$

其中

$$dq_{\text{感}} = -\frac{qh 2\pi x dx}{2\pi(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

对于无限大的金属板可用定积分方法求得其结果

$$\begin{aligned} q_{\text{感}} &= -qh \int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -qh \frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} \Big|_0^\infty = -q \end{aligned}$$

由此发现,此金属平板所带的电荷量与源电荷电荷量相等,电性相反,这也是与事实相吻合的:感应电荷的电荷量不大于源电荷的电荷量.对于感应电荷量小于源电荷量的情况可以用电场线的条数正

比于电荷量的方法予以证明,这里笔者不做过多赘述.

### 参考文献

1 梁灿彬,秦光戎,梁竹健.普通物理学教程电磁学(第2版).北京:高等教育出版社,2004.52~53

2 程守洙,江之永.普通物理学(第6版)上册.北京:高等教育出版社,2006.282~283

3 孙丽,汪邦家.2013年高考理综卷第20题赏析.物理通报,2014(7):101~103

## Tracing to Its Source—— Re-research on the 20th Question in Science Integrated Paper of 2013 Anhui College Entrance Examination Using Electrostatic Equilibrium Method

Xu Long

(Taihe No. 1 Middle School, Fuyang, Anhui 236600)

Xin Shuyuan

(Taihe Middle School, Fuyang, Anhui 236600)

**Abstract:** A physics exam question about electrostatic field is analyzed in the integrated test in science of Anhui Province in 2013. Some research is done using different ways for different types of exams and at the same time the cause of the electrostatic field is analyzed using the University physics knowledge from the microscopic angle

**Key words:** electrostatic equilibrium; the integrated test of Anhui province; electromagnetism; integral

(上接第92页)

### 3 结束语

在物理学中,我们可以根据给定条件建立物理量之间的函数表达式(数学模型),利用数学函数的方法研究物理过程,但很多物理过程中建立的数学表达式往往比较复杂,学生很难通过函数关系准确地发现其变化的规律和趋势.通过上述对典型例题的分析以及数值分析法的运用尝试,发现利用 Excel 的数值分析结合图像功能,可以摆脱函数计算的桎梏,将一段物理过程中物理量的变化规律完整清

楚地展现出来,具有简捷、直观、高效的优势,是帮助学生研究物理过程的有效手段,可以加深学生对物理本质的理解;同时也注意到,Excel 软件由于数据格式与计算精度设置的限制,计算得到的数据结果在高精确度要求下存在一定误差,这类误差一般出现在  $10^{-5}$  数量级,处于误差允许的范围.

### 参考文献

1 陈栋梁. EXCEL 数值分析法在高中物理教学中的应用——以 2015 年四川物理高考题为例.物理之友,2016,32(10):34~36

2 郭玉英.中学物理教学设计.北京:高等教育出版社,2016

## Talking about the Case of Graphing Physical Process Using Excel Numerical Analysis Method

Hu Yuchen

(College of Teacher Education, Nanjing Normal University, Nanjing, Jiangsu 210097)

**Abstract:** The study of physical processes is the only way to solve the physical problems. For complex physical processes, it is difficult to visually judge its characteristics and changes through function expressions. The numerical analysis method is to use the computer to calculate the scientific problem by numerical calculation. Excel software has the function of numerical analysis, and analyzes a typical example to explore the application of Excel numerical analysis in the study of physical process.

**Key words:** Excel; numerical analysis; physical process