

# 分数阻值的电阻化简问题\*

陈胤

(南京市第十八中学 江苏 南京 210022)

(收稿日期:2017-02-22)

**摘要:**给出  $mn$  个阻值为 1 的电阻,可以组成阻值为分数阻值  $\frac{m}{n}$  的电阻,本文给出了一种将它化简,以使所用的电阻个数最少,阻值仍为  $\frac{m}{n}$  的方法.

**关键词:**电阻 化简 定量分析 电学

## 1 引言

问题来源于这样的习题:电阻  $R = 10 \Omega$ , 现有 5  $\Omega$  的电阻若干:

(1) 怎样才能使电路中的电流增大到原来的两倍?

(2) 怎样才能使电路中的电流缩小到原来的 0.5 倍?

问题的解答是简单的. 但是深入地想一想,我们会想到:如果有很多个阻值相同的电阻  $R_0$ ,  $m$  个这样的电阻串联成电阻  $R_1$ , 有  $R_1 = mR_0$ ; 再将  $n$  个  $R_1$  并联起来, 总阻值为  $R = \frac{1}{n}R_1 = \frac{m}{n}R_0$ . 或者先将  $n$  个  $R_0$  并联起来, 总阻值为  $R'_1 = \frac{1}{n}R_0$ , 再将  $m$  个这样的电阻  $R'_1$  串联成电阻, 总阻值  $R' = mR'_1 = \frac{m}{n}R_0$ . 在这里, 先串后并和先并后串结果相同. 就是说, 只要出现方阵中的电阻都等值的话, 不论是先并联后串联, 还是先串联后并联, 结果都一样.

$mn$  个电阻组成一个  $mn$  方阵, 如图 1 所示.

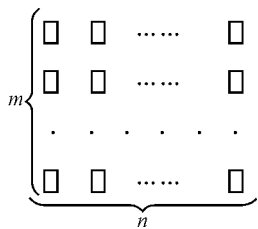


图 1  $mn$  方阵

这个方阵中用的电阻有  $mn$  个之多, 显然太多了, 我们希望使用的电阻当然是越少越好. 但是, 怎样去化简呢?

## 2 问题讨论

为了讨论问题的方便, 我们取所有的  $R_0 = 1$ , 并且假定  $(m, n) = 1$ , 即  $m$  与  $n$  互素, 同时假定  $\frac{m}{n} < 1$ , 上面的问题变为: 如果有很多个阻值为 1 的电阻, 组成总阻值为  $R = \frac{m}{n}$  的电阻的化简问题.

**引理:** 如果有  $mm$  个阻值为 1 的电阻, 先用  $m$  个这样的电阻串联成电阻  $R_1$ , 再将  $m$  个  $R_1$  并联起来, 总阻值为 1; 或先用  $m$  个这样的电阻并联成电阻  $R'_1$ , 再将  $m$  个  $R'_1$  并联起来, 总阻值为  $R = 1$ .

这个引理的证明非常简单, 方法见引言, 此处略过. 但是却是我们化简的基础, 它告诉我们, 在我们组成的  $mm$  电阻方阵中, 就可以被一个电阻替代.

## 3 化简方法

现在, 我们利用引理来做简化. 首先用  $mn$  个电阻, 构成一个阻值为  $\frac{m}{n}$  的  $mn$  电阻方阵, 根据假设,  $m < n$ , 如果  $m = 1$ , 那么它是  $n$  个电阻并联, 无须进一步化简.

如果  $m > 1$ , 在这个  $mn$  方阵中一定有  $mm$  方阵, 它有多少个呢?

\* 系南京市教育科学“十二五”规划 2015 年度课题“中学物理课程资源开发与学生科学探究能力培养研究”, 中国教育学会物理教学专业委员会 2013—2016 年全国物理教育科研重点课题“中学物理实验研究”之阶段性研究成果.

由于

$$mn = k_1 mm + q_1 m \quad (1 \leq q_1 < m) \quad (1)$$

所以这之中的有  $k_1$  个  $mm$  方阵, 它们可由  $k_1$  电阻替代, 如图 2 所示.

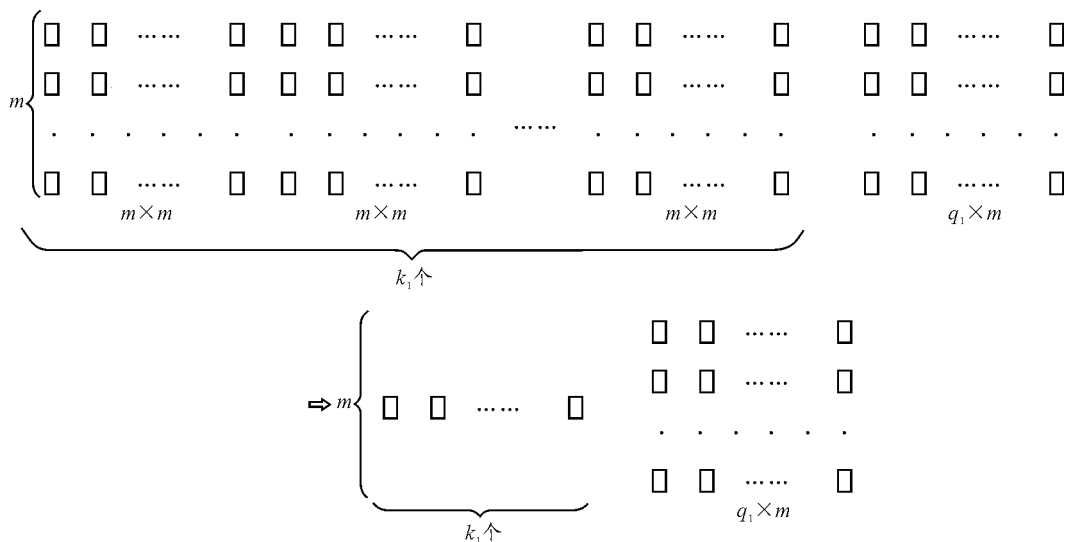


图 2  $k_1$  个  $mm$  方阵, 可由  $k_1$  个电阻替代

在剩余下的  $q_1 m$  的电阻方阵中, 又有

$$q_1 m = k_2 q_1 q_1 + q_2 q_1 \quad (1 \leq q_2 < q_1) \quad (2)$$

这之中的有  $k_2$  个  $q_1 q_1$  方阵, 它们可由  $k_2$  个电阻替代, 如图 3 所示.

$$q_j q_{j-1} = k_{j+1} q_j q_j + q_{j+1} \times q_j = k_{j+1} q_j q_j \quad (q_j = 1, q_{j+1} = 0) \quad (3)$$

实际上只剩下  $k_{j+1}$  个电阻, 注意到  $q_j = 1$ , 是整个简化过程结束的标志.

我们将简化的过程归纳为: 逢方归一, 横向并联, 纵向串联, 遇一结束.

我们来看一个例子.

**【例 1】**用阻值为 1 的电阻组成一个阻值为  $\frac{4}{15}$  的电阻.

先组成一个  $4 \times 15$  的电阻方阵, 如图 4 所示. 由引理, 无论先将横排的 15 个电阻并联后, 再将 4 个这样的串联; 还是先将纵列的 4 个电阻串联, 再将 15 个这样的并联, 都能组成阻值为  $\frac{4}{15}$  的电阻.

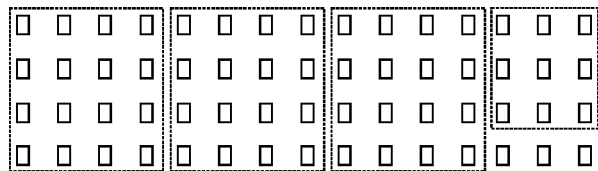


图 4  $4 \times 15$  的电阻方阵

现在我们来化简, 请看

(1) 首先在图 4 左边可以得到 3 个  $4 \times 4$  的电阻方阵, 可以简化成 3 个横向的电阻, 如图 5 所示.

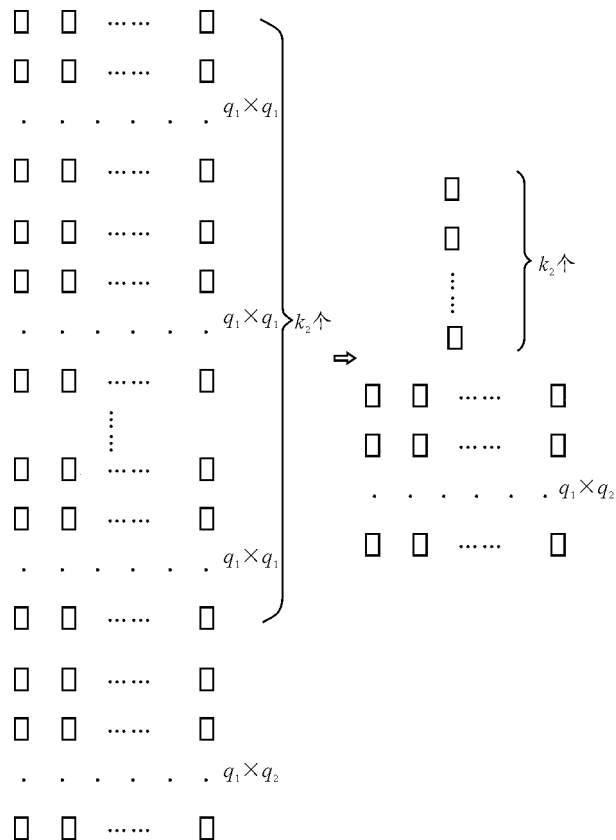


图 3  $k_2$  个  $q_1 q_1$  方阵, 可由  $k_2$  个电阻替代

反复(1)和(2)的步骤, 最后

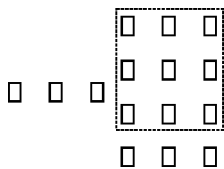


图5 图4左边3个4×4电阻方阵,可简化为3个横向电阻

(2) 右上角又可以得到1个3×3的电阻方阵,再简化成1个纵向的电阻,最后右下角是1个1×3的方阵,不可以简化了,就放3个横向的电阻,按照横向并接,纵向串接,简化后的结果连接起来,如图6所示.总共用了7个电阻.

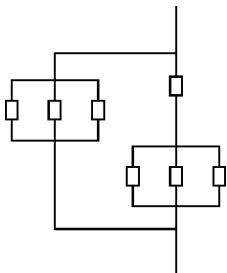


图6 简化结果

#### 4 讨论

(1) 说明:从式(1)~(3)可以得到

$$n = k_1 m + q_1 \quad (1 \leq q_1 \leq m) \quad (1')$$

$$m = k_2 q_1 + q_2 \quad (1 \leq q_2 \leq q_1) \quad (2')$$

.....

$$q_{j-1} = k_{j+1} q_j + q_{j+1} = k_{j+1} q_j + 0 \quad (q_j = 1, q_{j+1} = 0) \quad (3')$$

式(1')、(2')...及(3')实际上就是求 $m$ 和 $n$ 的最大公约数 $(m, n)$ 的辗转相除法,因为 $(m, n) = 1$ ,所以 $q_j = 1$ .

(2) 设在前面分数电阻化简的整个过程中,我们最后一共用了 $k$ 个电阻,按照我们前面的阐述有

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_{j+1} \quad (4)$$

而从式(1')得到

$$n = k_1 m + q_1 \geq k_1 m + 1 \geq k_1 + m$$

从式(2')... (3')可以得到类推得到

$$m \geq k_2 + q_1$$

$$q_1 \geq k_3 + q_2$$

.....

根据式(4),所以有

$$n \geq k_1 + k_2 + \dots + k_{j+1} \quad (5)$$

式(5)告诉我们,原来要得到阻值为 $\frac{m}{n}$ 的电阻

需要 $mn$ 个电阻.简化后需要用的电阻数不超过 $n$ 个.

(3)  $\frac{m}{n} > 1$ 时,仍可以用这个方法化简,最后所需

的电阻数不超过 $m$ 个.

(4) 当 $m$ 和 $n$ 不互素,即 $(m, n) = d > 1$ 时,可以先约分至互素,再用上面的方法.还可以先按照上面的方法做,到出现下式的时候结束.两种方法结果完全相同.

$$q_j q_{j-1} = k_{j+1} q_j q_j + q_{j+1} \times q_j =$$

$$k_{j+1} q_j q_j = k_{j+1} d d$$

$$q_{j+1} = 0$$

#### 5 结束语

初中物理中的一些问题,如果深究下去,其实是很有意思.探究的同时,也能提高物理教师本身的素质.

## The Resistance Reduction Issue of Fractional Resistance

Chen Yin

(No. 18 High School Nanjing, Nanjing, Jiangsu 210022)

**Abstract:** Given  $mn$  value of resistance of 1, it can form a resistor whose value is a fractional resistance —  $n/m$ . This essay gives a method to simplify it using the least number of resistors but the resistance is still the same.

**Key words:** electric resistance; simplify; quantitative analysis; electric