



对“顶杆游戏”的力学问题分析

吴寿宠 黄绍书

(六盘水市第23中学 贵州 六盘水 553000)

(收稿日期:2017-03-02)

摘要:从动力学角度分析“顶杆游戏”中的竖直平衡在微小扰动后的调整以及绕准定轴转动的力学问题,并给出竖直平衡情况的力矩约束关系和扰动调整时间,同时给出绕准定轴转动情形的力矩约束关系.

关键词:顶杆游戏 竖直平衡 微小扰动 调整时间 准定轴转动 力矩约束

在静态平衡中,物体的重心越低,其稳度就越高.然而,在动态平衡的情况下,物体的重心越低,反而越难维持其平衡状态.

我国民间的很多地方有一项为大众所喜闻乐见称为“顶杆游戏”的竞技表演,这一游戏也是很多戏团的杂耍项目之一.

所谓“顶杆游戏”,就是参与游戏的人用前伸的食指或中指顶着一根细杆,使细杆在动态中能够维持竖直状态或绕某准定轴转动而不倾倒,如图1所示.

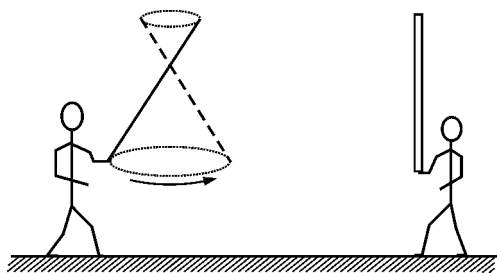


图1 顶杆游戏示意图

“顶杆游戏”是动态平衡的典型范例.本文从动力学角度,对“顶杆游戏”中的几个力学问题进行定量分析.

那么是不是世界上的人就都长得一样了?

生乙接着讲到:那人还能有美丑之分吗?

生丙:长得都一样的那是克隆人.

生丁:对,是克隆人.如果未来的战场上都是克隆人在第一线作战的话,那样就不会再有因为战争而牺牲的“士兵”了!

生戊:那是不是也可以克隆出很多的布什啊?

这时,教师不可以嘲笑学生的问题“可笑”“古怪”“离谱”“钻牛角尖”,否则会大大挫伤学生提问的积极性,相反教师还应鼓励学生的这种多角度、多方位的思维方式,因为思维创新是人的意识创新的一种表现形式.有了创新意识才能更好地培养学生的创新能力.

5 结束语

当教师能够确信每个学生都如同待开采的油矿

时,“差生”一词将会在人们的意识中慢慢淡忘,每一个学生都可以在不断取得成功的体验和社会对他的期待中获取知识,健康成长.

总之,高中物理教学与素质教育是密切相关的,教学活动中实施素质教育的主渠道,高中物理教师要能够根据自身学科特点,更新教育理念,培养学生善于发现问题、努力探究、勇于创新意识.要通过创设民主、和谐的学习氛围,实现高中物理教学活动的良性共振,以达到最佳的教学效果.真正体现高中物理教学的时代价值.

参考文献

- 1 顾建元. 试论探究教学的有效性策略. 物理教师, 2017(2):44~45
- 2 曾雪琴. 基于核心素养的高中物理实验教学探究. 中学物理教学参考, 2016(9):44~45
- 3 陆冬华. 趣味现象与高中物理课堂的整合途径探析. 中学物理, 2016(9):44~45

1 微小扰动下的竖直平衡调整

处于竖直平衡的杆由于受到某微小扰动,将会绕着支撑点(手指)转动而偏离竖直位置一个小角度.这时就必须在有限的时间内对杆进行调整,使之恢复竖直状态,游戏才能继续进行.

1.1 转动时间与杆长度的关系

为了便于说明问题,假定“顶杆游戏”中的杆为粗细均匀的匀质细杆.假设重力加速度为 g ,杆的长度为 l ,质量为 m ,杆在竖直位置受到某一扰动获得初始角速度 ω_0 后开始绕着支撑点 N 转动,转过角度 θ 时角速度变为 ω ,如图 2 所示.

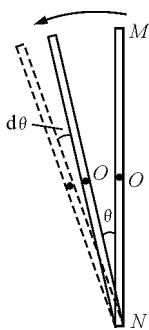


图 2 转动时间与杆的长度的关系分析图

在此过程中,根据刚体转动的动能定理^[1],有

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} (\omega^2 - \omega_0^2) \quad (1)$$

其中, $\frac{ml^2}{3}$ 为杆绕支撑点 N 转动的转动惯量.化简式

(1) 可得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \theta)}{l} + \omega_0^2} \quad (2)$$

若杆转过的角度由 θ 增为 $\theta + d\theta$ 的过程中,经历的时间为 dt ,那么

$$d\theta = \omega dt \quad (3)$$

将式(2)代入式(3),列出积分式,得

$$\int_0^\theta \frac{ld\theta}{\sqrt{3gl + l^2\omega_0^2 - 3gl\cos\theta}} = \int_0^t dt \quad (4)$$

令 $a = 3gl + l^2\omega_0^2$, $b = 3gl$,则式(4)可变为

$$t = l \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{a - b\cos\theta}} \quad (5)$$

这是一个不完全椭圆积分函数,没有解析解.这里利用 MATLAB 的 quad 函数^[2] 对式(5)进行编

程,可求出其时间 t 的数值解(精度可根据需求任意设定,比如设为 10^{-5}),如图 3 所示是该程序截图.若取 $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\omega_0 = 10^{-4} \text{ rad/s}$, $\theta = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$,杆长从 0.500 m 依次取到 2.300 m,步长值为 0.200 m,即杆长依次取 0.500, 0.700, 0.900, 1.100, 1.300, 1.500, 1.700, 1.900, 2.100, 2.300 m.那么,与之对应的时间 t 的数值解分别为 1.580, 1.833, 2.048, 2.237, 2.407, 2.563, 2.708, 2.843, 2.970, 3.090 s,如图 4 所示是程序运行截图.

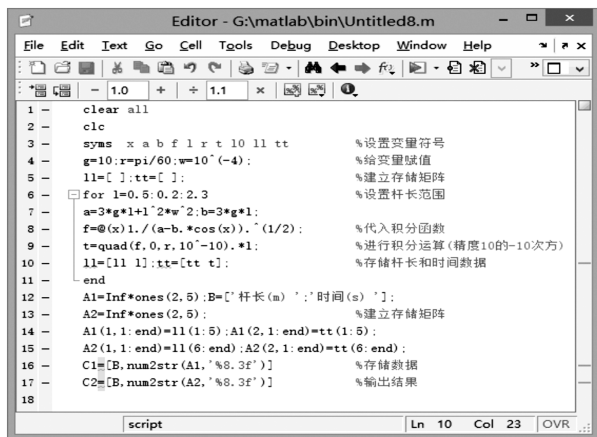


图 3 对式(5)编程截图

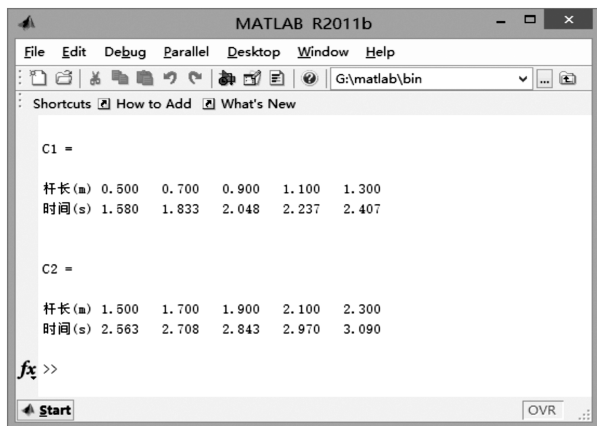


图 4 对式(5)编程,程序运行截图

由计算结果可看出,随着杆长的增加,达到相同角度所需时间也在增加.因此,杆越长,留给游戏者的调整时间也越长.所以,在“顶杆游戏”中,一般来说,杆越长越容易成功.

1.2 微小扰动调整的动力学分析

杆偏离竖直位置 θ 角后进行调整的过程中,杆受到重力 mg ,支撑点 N 的支持力 F_N 和静摩擦力 f 的作用,如图 5 所示.这时,杆的顶端 M 点是几乎不

动的准定点,可认为杆绕 M 点转动,因此,重力 mg , 支持力 F_N , 静摩擦力 f 对 M 点的转动力矩分别为

$$M_G = mg \frac{l}{2} \sin \theta \quad (6)$$

$$M_F = F_N l \sin \theta \quad (7)$$

$$M_f = fl \cos \theta \quad (8)$$

在缓慢调整的准平衡过程中,可认为 $F_N = mg$. 杆能否恢复竖直状态,就取决于这 3 个力矩之间的约束关系,也就是:

(1) 当 $M_f > M_F - M_G$, 即 $f > \frac{mg}{2} \cot \theta$ 时,杆能够恢复竖直状态.

(2) 当 $M_f = M_F - M_G$, 即 $f = \frac{mg}{2} \cot \theta$ 时,杆保持倾斜度不变,随支撑点做加速平动.

(3) 当 $M_f < M_F - M_G$, 即 $f < \frac{mg}{2} \cot \theta$ 时,杆偏离竖直方向的程度将加剧,进而会发生倾倒.

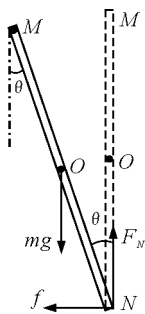


图5 微小扰动调整的动力学分析

2 准定轴转动的动力学原理

在“顶杆游戏”中,演技高超的游戏者,能使杆绕某准定轴转动而不倾倒,其转动面是一个或两个圆锥面.如图6所示,这种情况下,杆同样受到重力 mg , 支撑点 N 的支持力 F_N 和静摩擦力 f (图中只画出其法向分力 f_{\perp}) 的作用.

设准定点 O 与支撑点 N 之间的距离为 l_0 , 那么各个力对准定点 O 的转动力矩分别为

$$M_G = mg \left(l_0 - \frac{l}{2} \right) \sin \theta \quad (9)$$

$$M_F = F_N l_0 \sin \theta \quad (10)$$

$$M_f = f_{\perp} l_0 \cos \theta \quad (11)$$

这 3 个力矩之间的约束关系,决定了杆转动的稳定情况.在相对稳定转动的过程中,仍可认为 $F_N =$

mg , 因此可得:

(1) 当 $M_{f_{\perp}} > M_F - M_G$, 即 $f_{\perp} > \frac{1}{2} \frac{mgl}{l_0} \cot \theta$ 时,杆偏离竖直方向的程度将减弱,杆能维持动态的准稳定转动状态.

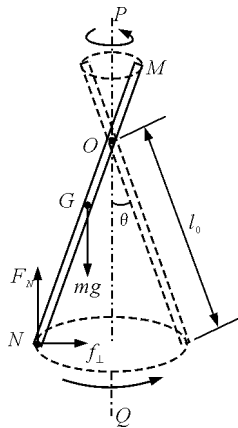


图6 准定轴转动的动力学原理分析图

(2) 当 $M_{f_{\perp}} = M_F - M_G$, 即 $f_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{mgl}{l_0} \cot \theta$ 时,杆保持倾斜度不变,即维持稳定转动状态.

(3) 当 $M_{f_{\perp}} < M_F - M_G$, 即 $f_{\perp} < \frac{1}{2} \frac{mgl}{l_0} \cot \theta$ 时,杆偏离竖直方向的程度将加剧,进而会发生倾倒.

3 结束语与说明

本文对“顶杆游戏”的分析还不很彻底,期待同行们的进一步深入探讨.同时,本文的上述分析中,有两点还须作适当说明.

(1) 在微小扰动的竖直平衡情形中,杆转过某一小角度 $d\theta$ 的时间问题,也可由式(2)、(3)进行定性分析.

(2) 杆绕某准定轴转动的情况下,静摩擦力 f 的法向分力 f_{\perp} 提供了杆绕准定轴转动的向心力,而其切向分力 f_{\parallel} (图中未画出) 的作用是补偿杆转动过程中的能耗,以维持或改变杆的转速.

参考文献

- 1 漆安慎,杜婵英.力学(第2版).北京:高等教育出版社,2005.224 ~ 225,231 ~ 232
- 2 彭芳麟.计算物理基础.北京:高等教育出版社,2010.140 ~ 141