

## 电阻网络对称端钮短接法的应用

蓝天翊 龚远帅 贾慧

(山东省实验中学高二 山东 济南 250001)

(收稿日期:2017-03-21)

**摘要:**利用电阻网络存在的对称性进行简化是一类重要的分析方法,但是对于端钮不具备对称结构的对称型电阻网络,往往无法利用整体的对称性进行简化.为此我们人为引入一个辅助端钮构造一个对称的三端电阻网络,利用对称端钮短接后电阻网络保持对称的特点来简化电路,并通过三端电阻网络的性质间接计算某些端钮间的等效电阻.对称端钮短接法作为一种新的分析方法,更加简便且利于理解掌握.

**关键词:**电阻网络 对称端钮 短接法

## 1 方法的提出

在分析有限或无限对称结构电阻网络的过程中,通常情况下运用 $T-\pi$ 转换法、电流叠加法或应用基尔霍夫定律求解.本文引入一种新的解题方法,更加简便且利于理解掌握.

图1(a)所示一个具有对称端钮的三端电阻网络,端钮 $a$ 与端钮 $a'$ 连接的等效电阻阻值相等.在某些电阻网络结构中,直接计算端钮 $ab$ (XY构型)或端钮 $aa'$ (XX构型)间等效电阻存在困难,但是我们可以通过短接对称端钮的方法,如图1(b)所示,间接计算出目标端钮间的等效电阻.根据端钮对称结构的不同,我们分XX构型及XY构型进行讨论.

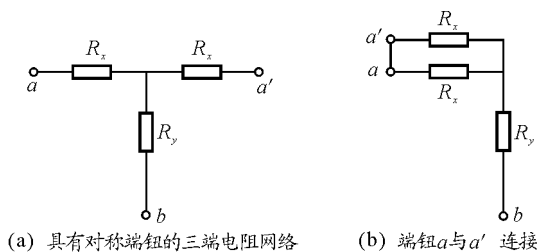


图1

## 1.1 XX构型

若直接计算端钮 $aa'$ 间电阻存在困难,且端钮 $a$ 与 $a'$ 在电阻网络中关于端钮 $b$ 对称.如果短接端钮 $a$ 与 $a'$ 后,端钮 $aa'$ 与 $b$ 间电阻可知,且端钮 $ab$ 间电阻可知,则通过以下方程组

$$\begin{cases} R_x + R_y = R_{a-b} \\ \frac{1}{2} R_x + R_y = R_{aa'-b} \end{cases} \quad (1)$$

推得 
$$\begin{cases} R_x = 2(R_{a-b} - R_{aa'-b}) \\ R_y = 2R_{aa'-b} - R_{a-b} \end{cases} \quad (2)$$

可得端钮 $a$ 与 $a'$ 间电阻为

$$R_{a-a'} = R_x + R_x = 4(R_{a-b} - R_{aa'-b})$$

## 1.2 XY构型

若直接计算端钮 $a$ 与 $b$ 间电阻存在困难,但是电阻网络中存在端钮 $a'$ 与端钮 $a$ 关于端钮 $b$ 对称,短接端钮 $aa'$ 后,端钮 $aa'$ 与 $b$ 间电阻可知,且端钮 $aa'$ 间电阻可知,则通过以下方程组

$$\begin{cases} R_x + R_x = R_{a-a'} \\ \frac{1}{2} R_x + R_y = R_{aa'-b} \end{cases} \quad (3)$$

推得 
$$\begin{cases} R_x = \frac{1}{2} R_{a-a'} \\ R_y = R_{aa'-b} - \frac{1}{4} R_{a-a'} \end{cases} \quad (4)$$

可得端钮 $a$ 与 $b$ 间电阻为

$$R_{a-b} = R_x + R_y = R_{aa'-b} + \frac{1}{4} R_{a-a'}$$

## 2 方法的应用

**【例1】**如图2(a)所示田字格电阻网络,各小边电阻值为 $R$ ,求端钮 $a$ 与 $b$ 间电阻.

作者简介:蓝天翊(2000- ),男,在读高中生.龚远帅(2000- ),男,在读高中生.

指导教师:贾慧(1984- ),女,硕士,主要从事高中物理教学及美国AP物理课程教学研究.

常见方法是使用电流叠加法,但是该方法的使用超出了高中物理教学大纲,不便于同学们理解.本例使用对称端钮短接法后,解题过程简洁易懂.

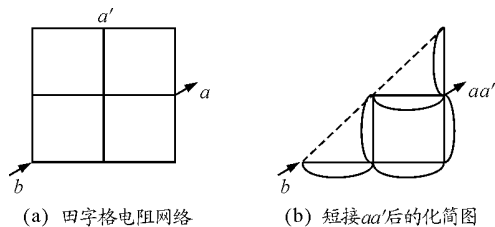


图2

显然端钮  $a$  与端钮  $a'$  关于端钮  $b$  对称,易知端钮  $a$  与  $a'$  间电阻为  $R_{a-a'} = \frac{5}{6}R$ . 短接端钮  $aa'$  后,电阻网络简化如图 2(b) 所示,可得端钮  $aa'$  与端钮  $b$  间电阻为  $R_{aa'-b} = R$ . 根据 XY 构型方程

$$\begin{cases} R_x + R_x = \frac{5}{6}R \\ \frac{1}{2}R_x + R_y = R \end{cases} \quad (5)$$

推得

$$\begin{cases} R_x = \frac{5}{12}R \\ R_y = \frac{19}{24}R \end{cases} \quad (6)$$

可得端钮  $a$  与  $b$  间电阻为  $R_{a-b} = \frac{29}{24}R$ .

**【例 2】**如图 3(a) 所示正方体电阻网络,各小边电阻为  $R$ ,计算端钮  $a$  与  $b$  间电阻.

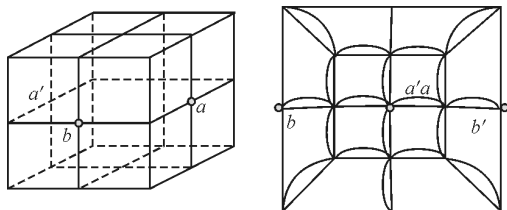


图3

观察该电阻网络,易见端钮  $a$  与端钮  $a'$  关于端钮  $b$  对称,且端钮  $a$  与  $a'$  之间电阻易得为  $R_{a-a'} = \frac{4}{5}R$ . 短接端钮  $aa'$ ,并将电阻网络进行简化如图 3(b) 所示.显然,新的电阻网络中端钮  $b$  与端钮  $aa'$  为 XY 构型,端钮  $b$  与端钮  $b'$  关于端钮  $aa'$  对称.端钮  $b$  与  $b'$  间电阻等于图 3(a) 网络中端钮  $a$  与  $a'$  间电阻,即  $R_{b-b'} = \frac{4}{5}R$ ,再次将端钮  $bb'$  短接并对电阻网络进行简化,如图 4 所示.可得端钮  $bb'$  与端钮  $aa'$  间的电阻为  $R_{aa'-bb'} = \frac{2}{7}R$ .

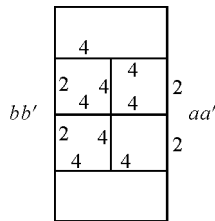


图4 继续短接图 3(b) 中  $bb'$  后的化简图

注:数字 2,4 表示并联边数

根据 XY 构型方程组

$$\begin{cases} R_x + R_x = \frac{4}{5}R \\ \frac{1}{2}R_x + R_y = \frac{2}{7}R \end{cases} \quad (7)$$

推得

$$\begin{cases} R_x = \frac{2}{5}R \\ R_y = \frac{3}{35}R \end{cases} \quad (8)$$

可解出端钮  $aa'$  与端钮  $b$  间电阻为  $R_{aa'-b} = \frac{17}{35}R$ ,

将这一结果代入如图 3 所示 XY 构型.

$$\begin{cases} R_x + R_x = \frac{4}{5}R \\ \frac{1}{2}R_x + R_y = \frac{17}{35}R \end{cases} \quad (9)$$

推得

$$\begin{cases} R_x = \frac{2}{5}R \\ R_y = \frac{2}{7}R \end{cases} \quad (10)$$

所以,端钮  $a$  与端钮  $b$  间电阻为

$$R_{a-b} = \frac{24}{35}R$$

**【例 3】**如图 5(a) 所示,各小边电阻为  $R$ ,计算端钮  $a$  与  $a'$  间电阻.

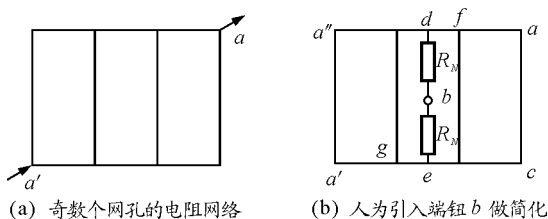


图5

对于图 5(a) 所示奇数个网孔的电阻网络,端钮  $a$  与  $a'$  的对称点并不位于电阻网络上,为解决这一困难,我们人为引入端钮  $b$ ,分别通过电阻  $R_N$  连接至上下两边的中点.当  $R_N$  趋于无穷大时,端钮  $b$  所在支路对端钮  $a$  与  $a'$  间电阻的影响趋于零.因为端钮  $a$  与  $a'$  关于端钮  $b$  对称,所以为 XX 构形.

但是计算端钮 $a'b$ 间电阻同样存在困难,所以我们继续引入端钮 $a''$ ,端钮 $a'$ 与 $a''$ 关于端钮 $b$ 对称,所以为XY构型.易知端钮 $a'$ 与 $a''$ 间电阻为 $R_{a'-a''} = \frac{41}{56}R$ (因 $R_N$ 趋于无穷,所以 $R_N$ 作开路处理).短接端钮 $a'$ 与 $a''$ 后,端钮 $a'a''$ 与端钮 $b$ 间电阻为 $R_{a'a''-b} = \frac{1}{2}R_N + \frac{3}{4}R$ .根据XY构型方程组,有

$$\begin{cases} R_x + R_x = \frac{41}{56}R \\ \frac{1}{2}R_x + R_y = \frac{1}{2}R_N + \frac{3}{4}R \end{cases} \quad (11)$$

推得

$$\begin{cases} R_x = \frac{41}{112}R \\ R_y = \frac{1}{2}R_N + \frac{127}{224}R \end{cases} \quad (12)$$

所以端钮 $a'$ 与端钮 $b$ 间电阻为

$$R_{a'-b} = \frac{1}{2}R_N + \frac{209}{224}R$$

将结果代入图5(b)所示XX构型,短接端钮 $a$ 与 $a'$ ,并对电阻网络进行简化,如图6所示.

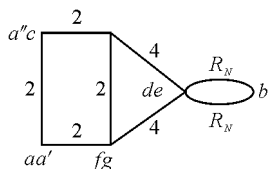


图6 将图5(b)中的 $aa'$ 短接后的化简图

显然端钮 $aa'$ 和端钮 $a''c$ 关于端钮 $b$ 对称,为XY构型.易知端钮 $aa'$ 和端钮 $a''c$ 间电阻为 $R_{aa'-a''c} = \frac{5}{14}R$ .短接端钮 $aa'$ 与 $a''c$ 后,端钮 $aa'a''c$ 与端钮 $b$ 间

电阻为 $R_{aa'a''c-b} = \frac{1}{2}R_N + \frac{3}{8}R$ .根据XY构型方程组

$$\begin{cases} R_x + R_x = \frac{5}{14}R \\ \frac{1}{2}R_x + R_y = \frac{1}{2}R_N + \frac{3}{8}R \end{cases} \quad (13)$$

推得

$$\begin{cases} R_x = \frac{5}{28}R \\ R_y = \frac{1}{2}R_N + \frac{2}{7}R \end{cases} \quad (14)$$

所以端钮 $aa'$ 与端钮 $b$ 间电阻为 $R_{a'a-b} = \frac{1}{2}R_N +$

$\frac{13}{28}R$ .将此结果代入图5(b)所示XX构型方程组

$$\begin{cases} R_x + R_y = \frac{1}{2}R_N + \frac{209}{224}R \\ \frac{1}{2}R_x + R_y = \frac{1}{2}R_N + \frac{13}{28}R \end{cases} \quad (15)$$

推得

$$\begin{cases} R_x = \frac{15}{16}R \\ R_y = \frac{1}{2}R_N - \frac{1}{224}R \end{cases} \quad (16)$$

所以端钮 $a$ 与端钮 $a'$ 间电阻为

$$R_{a'-a} = \frac{15}{8}R$$

从以上例题中可以看到,对称端钮短接法为我们处理具有对称结构的电阻网络提供了新的思路,概念的理解相对容易,计算方法也是简便的.

#### 参考文献

- 1 高伟吉.用顺次短接顺次断开法求电阻T形网络与 $\pi$ 形网络的等效变换.通化师范学院学报,2001,22(5):49~51
- 2 李瀚荪.电路分析基础.北京:高等教育出版社,1983.112

## Application on Shorten Join Method of Symmetrical End Knob in Resistance Network

Lan Tianyi Gong Yuanshuai Jia Hui

(Shandong Experimental High School, Jinan, Shandong 250001)

**Abstract:** Use the symmetry of the resistance network to simplify circuit is an important way to analyze the problems, but this is not useful if the points which the resistance between them need to be calculated are not in the right places. So we build the assist point to construct the three ends' resistance network that is symmetrical, which can be used to simplify the circuit, then we can get the answer indirectly. The Symmetrical shorten method is seen as a new problem - analyze method, which is more easy in solving the problem and more understandable.

**Key words:** resistance network; symmetrical point; shorten