

# 二维完全弹性碰撞的理论研究

周游 刘程 涂灿辉 刘华 郑才龙

(湖北师范大学化学化工学院 湖北黄石 435002)

(收稿日期:2017-03-23)

**摘要:**用相关的物理知识解决二维碰撞的问题,发现碰撞中更为普遍的规律.对于二维完全弹性碰撞问题,可以用矢量分解、能量守恒和动量守恒解决.

**关键词:**二维弹性碰撞 矢量分解 能量守恒 动量守恒 速度

在生活或学习中,有许多的碰撞现象,例如桌球之间的碰撞、微观粒子之间的轰击、天体之间的相互撞击等.这些过程有明显的特点:一般发生在二维平面内,相互作用的时间极短,相互作用力极大,运动状态瞬间发生急剧改变,在物理学中这类问题叫做碰撞<sup>[1~3]</sup>.

碰撞是生活中常见的现象,也是经典物理学的重点,更是动量中的核心内容.最初动量守恒定律正是为了解决碰撞问题而发现的.我们在中学物理中学习了正碰,领悟到动量的巨大魅力.

通常所说的碰撞包括正碰和斜碰,本次研究较为复杂且应用更广的斜碰,即二维碰撞.发生斜碰的两个物体光滑,没有摩擦,碰后两物体只有平动没有转动,这是完全弹性二维碰撞的条件.如果系统有摩擦,则碰后物体既有平动又有转动,且有能量损失,属于普通二维碰撞,此问题难以解决<sup>[4~6]</sup>.

关于二维碰撞问题,不少学者对其进行理论或实验的研究,如用质心系法、矢量三角形、计算机程序、碰撞实验等方法进行研究;基于他们的工作,我们用基础物理学知识系统地研究了二维完全弹性碰撞<sup>[7,8]</sup>.本文介绍了用通俗易懂的物理方法解决较为复杂的问题,得到了速度大小和方向的准确解析解,对各种碰撞情况进行分类讨论,并通过作图辅助说明均得到了相应的结论,从而拓展了碰撞研究的

广度和深度.

从简单情况出发,处理两个小球的二维完全弹性碰撞.设质量为  $m_1$  的小球 A 以初速度  $v_0$  射向质量为  $m_2$  静止的小球 B,如图 1 所示,初速度  $v_0$  方向和两球碰撞时球心连线方向所成的入射夹角为  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 90^\circ$ ),发生弹性碰撞后,求解末速度大小和散射角.

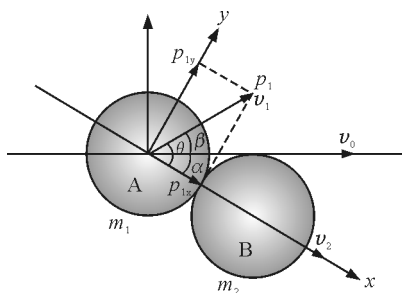


图1 二维完全弹性碰撞分析图

## 1 解决思路

由于两球碰撞为理想的二维碰撞,故碰撞过程能量守恒、动量守恒. A 和 B 碰撞瞬间如图 1 状态.以两球球心连线方向为  $x$  轴,垂直于球心连线且过 A 球心的方向为  $y$  轴;可以设 A 的末速度  $v_1$  沿  $x$  轴方向分量为  $v_x$ ,在  $y$  轴方向上分量为  $v_y$ ,故与 B 发生作用的只有  $v_x$ ,根据一维碰撞规律,B 碰后末速度方向必然和  $v_x$  方向共线.在任意两个正交方向上运用分动量守恒,并结合能量守恒和分速度关系,即可求

解末速度.

$$v_2 = \frac{2m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} v_0$$

## 2 解决过程

设 A 碰后的末速度大小为  $v_1$ , B 碰后的末速度大小为  $v_2$ ,  $v_1$  在  $x$  和  $y$  轴方向的分量分别为  $v_x$  和  $v_y$ , A 碰后  $v_1$  与碰前  $v_0$  方向夹角为  $\beta$ , 碰后两球末速度  $v_1$  和  $v_2$  之间的夹角为  $\theta$ , 即有角度关系  $\alpha + \beta = \theta$ .

若引入恢复系数

$$e = \frac{v_2 - v_x}{v_0 \cos \alpha} = \frac{v_2 - v_x}{\sqrt{v_0^2 - v_y^2}}$$

本次研究情形即  $e = 1$ , 可用于求解检验.

由  $x$  轴方向分动量守恒有

$$m_1 v_0 \cos \alpha = m_1 v_x + m_2 v_2 \quad (1)$$

由  $y$  轴方向分动量守恒有

$$m_1 v_0 \sin \alpha = m_1 v_y \quad (2)$$

由系统碰撞前后能量守恒有

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \quad (3)$$

由  $v_1$  的合、分速度关系有

$$v_1^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (4)$$

由式(1)~(4)即可求解.

由式(1)得

$$v_x = v_0 \cos \alpha - \frac{m_2}{m_1} v_2$$

由式(2)得

$$v_y = v_0 \sin \alpha$$

将  $v_x$  和  $v_y$  代入到式(4)有

$$v_1^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_0 v_2 \cos \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha$$

化简得

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_0 v_2 \cos \alpha$$

将  $v_1^2$  代入式(3)中

$$m_1 v_0^2 = m_1 \left( v_0^2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_0 v_2 \cos \alpha \right) + m_2 v_2^2$$

化简得

因

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_0 v_2 \cos \alpha$$

将  $v_2$  代入上式有

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} \left( \frac{2m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} \right)^2 v_0^2 - 4 \frac{m_2}{m_1} \frac{m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} v_0^2 \cos \alpha$$

化简得

$$v_1 = \sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2 \cos^2 \alpha}{(m_1 + m_2)^2}} v_0$$

或

$$v_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2\alpha}}{m_1 + m_2} v_0$$

因为动量在  $v_0$  方向上守恒, 故

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos \beta + m_2 v_2 \cos \alpha$$

将  $v_1$  和  $v_2$  代入上式得

$$\beta = \arccos \frac{m_1 - m_2 \cos 2\alpha}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2\alpha}}$$

又因为

$$v_x = v_0 \cos \alpha - \frac{m_2}{m_1} v_2 = v_1 \cos \theta$$

联立并将  $v_1$  和  $v_2$  代入得

$$\theta = \arccos \frac{(m_1 - m_2) \cos \alpha}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2\alpha}}$$

## 3 分析讨论

二维弹性碰撞的两球末速度大小为

$$v_1 = \sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2 \cos^2 \alpha}{(m_1 + m_2)^2}} v_0$$

$$v_2 = \frac{2m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} v_0$$

A 的末速度  $v_1$  与  $v_0$  方向夹角为

$$\beta = \arccos \frac{m_1 - m_2 \cos 2\alpha}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2\alpha}}$$

两球末速度方向夹角为

$$\theta = \arccos \frac{(m_1 - m_2) \cos \alpha}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2\alpha}}$$

为了方便讨论,不妨设  $\frac{m_1}{m_2} = u$ , 则

$$v_1 = \sqrt{1 - \frac{4u \cos^2 \alpha}{(u+1)^2}} v_0 =$$

$$\frac{\sqrt{u^2 + 1 - 2u \cos 2\alpha}}{u + 1} v_0$$

$$v_2 = \frac{2u \cos \alpha}{u + 1} v_0$$

$$\beta = \arccos \frac{u - \cos 2\alpha}{\sqrt{u^2 + 1 - 2u \cos 2\alpha}}$$

$$\theta = \arccos \frac{(u - 1) \cos \alpha}{\sqrt{u^2 + 1 - 2u \cos 2\alpha}}$$

特别地,可以分下列几类情况讨论:

(1) 当两球质量相等时,即  $u=1$  时,公式可以简

化为

$$v_1 = v_0 \sin \alpha \quad v_2 = v_0 \cos \alpha$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \quad \theta = 90^\circ$$

(2) 当碰前夹角  $\alpha=0$ ,碰撞前后速度始终共线,变为一维弹性碰撞,即弹性正碰情形

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

$$\beta = \theta = 0$$

(3) 当  $m_1 > m_2$ ,两球末速度夹角为锐角;

当  $m_1 < m_2$ ,两球末速度夹角为钝角;

当  $m_1 = m_2$ ,两球末速度夹角为直角.

(4) 当  $m_1 \gg m_2$ ,即  $u$  很大时

$$v_1 \approx v_0 \quad v_2 \approx 2v_0 \cos \alpha$$

$$\beta \approx 0 \quad \theta \approx \alpha$$

当  $m_1 \ll m_2$ ,即  $u \approx 0$  时

$$v_1 \approx v_0 \quad v_2 \approx 0$$

$$\beta \approx 180^\circ - 2\alpha \quad \theta \approx 180^\circ - \alpha$$

#### 4 图像解析

(1)  $v_1$  和  $v_2$  随  $\alpha$  变化图像

1) 当  $u=0.5$  时,  $v_1$  和  $v_2$  随  $\alpha$  变化图像如图 2 所示.

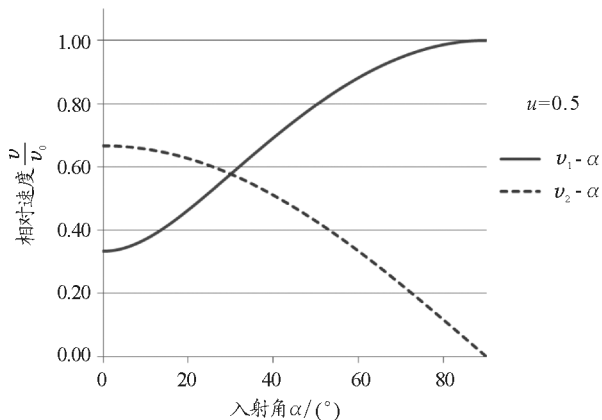


图 2  $u=0.5$  时,  $v_1$  和  $v_2$  随  $\alpha$  变化图像

2) 当  $u=1$  时,  $v_1$  和  $v_2$  随  $\alpha$  变化图像如图 3 所示.

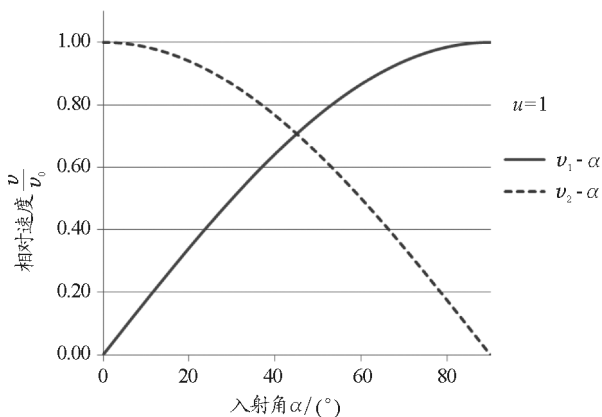


图 3  $u=1$  时,  $v_1$  和  $v_2$  随  $\alpha$  变化图像

3) 当  $u=2$  时,  $v_1$  和  $v_2$  随  $\alpha$  变化图像如图 4 所示.

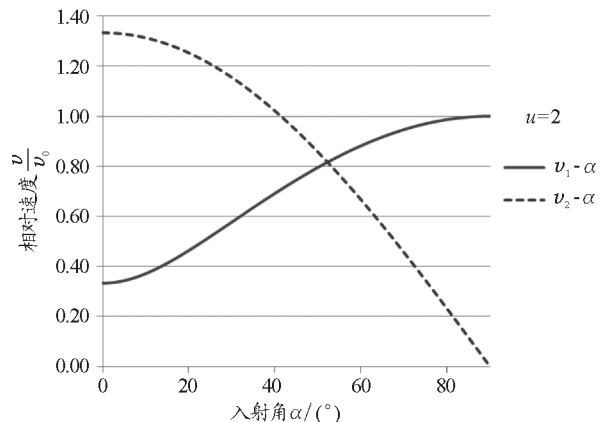


图 4  $u=2$  时,  $v_1$  和  $v_2$  随  $\alpha$  变化图像

**小结:** 无论质量比如何变化,  $v_1$  随  $\alpha$  改变而递增至  $v_0$ ,  $v_2$  随  $\alpha$  改变而递减至零.

(2)  $\beta$  和  $\theta$  随  $\alpha$  变化图像

1) 当  $u=0.1$  时,  $\beta$  和  $\theta$  随  $\alpha$  变化图像如图 5 所示.

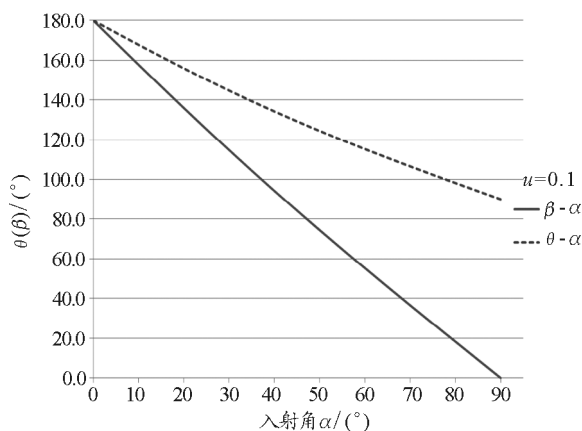


图 5  $u=0.1$  时,  $\beta$  和  $\theta$  随  $\alpha$  变化图像

2) 当  $u=2$  时,  $\beta$  和  $\theta$  随  $\alpha$  变化图像如图 6 所示.

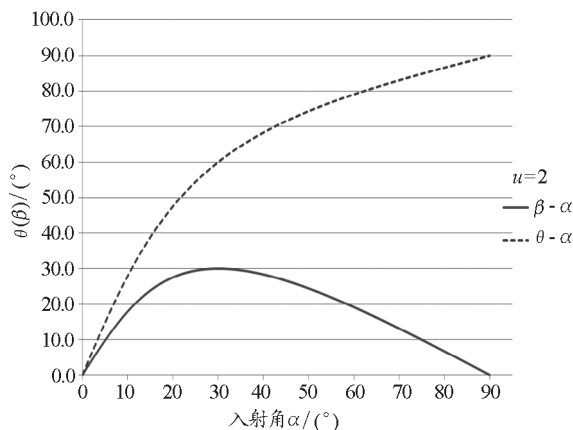


图 6  $u=2$  时,  $\beta$  和  $\theta$  随  $\alpha$  变化图像

3) 当  $u=6$  时,  $\beta$  和  $\theta$  随  $\alpha$  变化图像如图 7 所示.

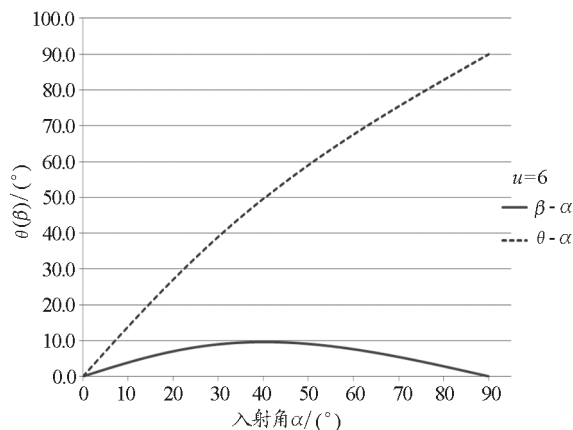


图 7  $u=6$  时,  $\beta$  和  $\theta$  随  $\alpha$  变化图像

当  $u \geq 6$  时,  $\theta$  随  $\alpha$  变化的图像接近递增的直线, 且  $u$  越大, 拟合度越好; 而  $\beta$  有极大值, 且  $\beta$  在两端点均为零,  $u$  越大  $\beta$  的极大值越小.

鉴于当质量比  $u > 1$  时, 在入-散射角图像中发现 A 的散射角度  $\beta$  有极大值, 通过求导, 即

$$\frac{d \cos \beta}{d \alpha} = 0$$

得

$$u \cos 2\alpha = 1$$

即  $\beta$  在

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{u}$$

处有

$$\beta_{\max} = \arccos \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u}$$

在上述图像中, 将质量比代入极值公式

$$u=2 \quad \alpha=30.00^\circ \quad \beta_{\max}=30.00^\circ$$

$$u=6 \quad \alpha=40.20^\circ \quad \beta_{\max}=9.59^\circ$$

### 5 研究总结

本文从理论上严谨地推导了二维完全弹性碰撞的速度公式, 并对其进行深入地分析讨论. 通过一维碰撞等特殊情况的验证, 以及图像的直观变化规律, 我们对较为陌生的斜碰有了更为完整的认识和深刻的理解. 本文解决了中学尚未学习而大学忽略讨论的斜碰问题, 发现了斜碰的力学规律, 拓展了经典力学研究碰撞的范围.

### 参考文献

- 1 陈亚兰. 一维对心完全弹性碰撞的速度分析. 河南科技, 2014(01):184 ~ 184
- 2 朱晓波, 黄奚超, 邹毅. 二维碰撞的简化计算及其电脑程序. 吉林工业大学自然科学, 2001(31):91 ~ 95
- 3 曾奇军, 戈静, 徐元国, 等. 弹性碰撞的图示分析法. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2013, 26(3):343 ~ 347
- 4 人民教育出版社. 高中物理选 3-5. 北京: 人民教育出版社, 2010
- 5 漆安慎, 杜婵英. 力学(第 3 版). 北京: 高等教育出版社, 2012

**小结:** 当  $u \leq 0.3$  时,  $\beta$  和  $\theta$  随  $\alpha$  变化的图像接近递减的直线,  $\theta$  在两端点取值为  $180^\circ$  和  $90^\circ$ ;  $\beta$  在两端取值为  $180^\circ$  和  $0$ ; 且  $u$  越小, 拟合度越高.

- 6 H. Orland, R. Schaeffer. Two - body collisions and time dependent Hartree - Fock theory. Zeitschrift für Physik A: Atoms and Nuclei, 1979, 290(2): 191 ~ 204 35 ~ 37
- 8 刘金铭, 陈阳, 陈琪. 关于弹性斜碰前后系统动能的讨论. 湖南中学物理, 2015(2): 82 ~ 84
- 7 李忠相. 处理斜碰问题的三种方法. 物理通报, 2014(5):

## The Theoretical Research on Two - dimensional Perfect Elastic Collision

Zhou You Liu Cheng Tu Canhui Liu Hua Zheng Cailong

(School of Chemistry and Chemical Engineering, HuBei Normal University, Huangshi, Hubei 435002)

**Abstract:** The Collision is a common phenomenon in our life, and it is important for classical physics, as well as it is the core content in the momentum. The first law of conservation momentum was found in order to solve the problem of collision. We have learnt the central collision in the high school and comprehended the great charm of momentum. In this article, we use the relevant physical knowledge to solve the two - dimensional collision problem, and find the more general regular in collision. As for the problem of two - dimensional perfect elastic collision, the vector decomposition, energy conservation and momentum conservation can be used to solve it.

**Key words:** two - dimensional elastic collision; vector decomposition; energy conservation; conservation of momentum; speed

(上接第 45 页)

## Analysis on the Process of Car's Movement With Constant Power

Ou Shigang Yang Yunshan Huang Min

(Mingzhang Institution of Xindu No. 1 High School, Chengdu, Sichuan 610500)

Zhao Yunhe

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

**Abstract:** In this paper, the process of accelerating driving with constant output power is analyzed under the influence of air resistance. The differential equation of automobile motion is obtained and the ultimate velocity increases with the increase of power. The resistance coefficient And then the numerical simulation and further discussion on the theory, the greater the power, the smaller the quality of the car, 100 km faster acceleration time, and friction coefficient has nothing to do with the conclusion.

**Key words:** engine output power; air resistance; acceleration time; ultimate speed