竞赛与
物理专题研修

利用两个结论 巧解一道难题

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2017-03-28）

摘　要：归纳两个有关瞬态过程的结论，直接用来解答一道含有电容器与滑动杆的电磁感应电路的难题，这种特殊解法与常规解法所得结果相同，由此验证结论的正确性，体现结论在解题中的重要作用.

关键词：瞬态过程　结论　电磁感应　电容器

瞬态过程具有很强的规律性，在物理学中的应用比较广泛. 下面给出关于瞬态过程的两个结论，并用来解答一道有关“电容器-滑动杆”的瞬态电路问题. 由此可对解题过程化繁为简，显得巧妙快捷.

结论1：对于一个瞬态过程的变量 $x=f(t)$，设初始值为 $x_0=f(0)$，稳态值为 $x_\infty=f(\infty)$，时间常数为 τ，若满足一阶常系数线性微分方程

$$x_\infty = x + \tau\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

则其通解为指数函数

$$x = x_\infty + (x_0 - x_\infty)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

即 $$f(t) = f(\infty) + [f(0) - f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

结论2：对于含有电容器（已知参数为 C 和 Q_0）与滑动杆（已知参数为 B, l, m, R）的瞬态电路，电容器可等效为匀强磁场中的一个滑动杆，其电阻为零，质量 $m_0 = CB^2l^2$，初速度 $v_0 = \dfrac{Q_0}{CBl}$.

上述两个结论可分别称为瞬态过程的结论和电容器等效变换的结论. 对于按指数函数规律变化的瞬态过程，只要推导出关于某个变量的一阶常系数线性微分方程的标准形式，得出3个要素，即可写出某个物理量随时间变化的关系式. 对“电容器-滑动杆”瞬态电路问题的解答，可将电容器等效替换为一个滑动杆，对应3个参数，由此转换为双杆滑动的纯电阻电路问题，拓展了解题思路和方法. 下面进行举例分析.

【例题】 如图1所示，水平放置的光滑金属导轨，处在竖直向下的匀强磁场，磁感应强度为 B，导轨间距为 l，足够长，电容器的电容为 C，金属棒 ab 垂直于导轨放置，其质量为 m，电阻为 R，导轨电阻不计. 现有一个水平向右的恒力 F 垂直作用在棒 ab 上，设电容 C 足够大，求金属棒运动的速度和加速度随时间变化的关系式.

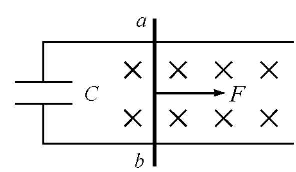

图1　题图

解析：金属杆在恒力作用下切割磁感线，产生感应电动势 $E=Blv$，给电容器充电，电路中形成电流，使金属杆受到水平向左的安培力的作用. 可将电容器转换为滑动杆 $a'b'$，其电阻为零，初速度为零，质量 $m_2=CB^2l^2$，如图2所示，设右杆的质量 $m_1=m$. 在 $t=0$ 时刻，两杆都处于静止状态，设某时刻两杆的速度分别为 v_1 和 v_2，产生感应电动势，因两个电源反向串联，且 $v_1 > v_2$，故整个回路的感应电动势为

$$e = Bl(v_1 - v_2)$$

则感应电流为

$$i = \frac{Bl}{R}(v_1 - v_2)$$

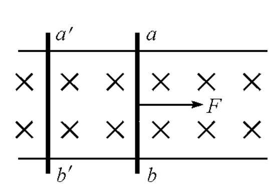

图2　将电容器转换为滑动杆 $a'b'$

以向右为正方向，对左、右两个金属杆由牛顿第二定律分别列出微分方程为

$$F - Bli = m_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$$

$$f = Bli = m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$$

对感应电流关于时间取导数为

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{Bl}{R}\left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}\right)$$

联立可得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{BlF}{m_1 R} - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} ki$$

式中
$$k = \frac{B^2 l^2}{R}$$

设
$$m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

则有
$$\frac{m'}{k}\frac{BlF}{m_1 R} = i + \frac{m'}{k}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

这是关于感应电流 i 的一阶常系数线性微分方程的标准形式. 设 $i = f(t)$，可知电流的稳态值为

$$f(\infty) = \frac{m'}{k}\frac{BlF}{m_1 R} = \frac{CBlF}{m + CB^2 l^2}$$

时间常数为

$$\tau = \frac{m'}{k} = \frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)} = \frac{mRC}{m + CB^2 l^2}$$

感应电流的初始值为 $f(0) = 0$，由瞬态过程的结论可知方程的解为

$$i = \frac{CBlF}{m + CB^2 l^2}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

由牛顿第二定律得加速度为

$$a_1 = \frac{F - Bli}{m} = \frac{F}{m + CB^2 l^2}\left(1 + \frac{CB^2 l^2}{m}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

则相对速度为

$$v_1 - v_2 = \frac{Ri}{Bl} = \frac{FRC}{m + CB^2 l^2}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

对整体由动量定理有

$$Ft = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

两式联立得

$$v_1 = \frac{Ft}{m + CB^2 l^2} + \frac{FRC^2 B^2 l^2}{(m + CB^2 l^2)^2}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

将速度关系式对时间取导数也可得加速度关系式.

这就是如图 1 所示的“电容器-滑动杆”电路中滑动杆运动的速度和加速度.

速度关系式和加速度关系式还可分别变形为

$$v_1 = \frac{Ft}{m_1 + m_2} + \frac{Fm_2^2}{k(m_1 + m_2)^2}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$a_1 = \frac{F}{m_1 + m_2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

这就是如图 2 所示的双杆在磁场中运动时主动杆的速度和加速度.

可见，当感应电流趋于稳态时，两个金属杆具有相同的恒定加速度，都将做匀加速直线运动. 若 $m_1 = m_2 = m$，则此时主动杆和从动杆运动速度随时间变化的关系式分别为

$$v_1 = \frac{F}{2m}t + \frac{F}{4k}$$

$$v_2 = \frac{F}{2m}t - \frac{F}{4k}$$

都随时间线性增大.

对于“电容器-滑动杆”电路，虽然感应电动势和电流都可趋于稳态，加速度也能趋于稳态，但滑动杆的速度不能趋于稳态. 或者说，滑动杆先做初速度为零的变加速运动，经历时间为

$$t_0 = 5\tau = \frac{5mRC}{m + CB^2 l^2}$$

后，将趋于匀加速运动，加速度为

$$a_1 = \frac{F}{m + CB^2 l^2}$$

对应的初速度即此时速度图像切线的纵截距为

$$v_1 = \frac{FRC^2 B^2 l^2}{(m + CB^2 l^2)^2}$$

虽然根据两个电路的等效性可以求出某些物理量，但要注意个别物理量是不同的，例如两个电路中的感应电动势不相等.

参 考 文 献

1　郑金. 利用结论巧解“甲虫和橡胶带”问题[J]. 物理通报，2012(4)：61 ～ 63

2　郑金. 电容器与滑杆的等效变换[J]. 物理教师，2014(1)：96，封三

3　黄健康. 有无电阻的导体棒都能做匀加速直线运动吗[J]. 物理教师，2016(10)：62 ～ 63

4　郑金. 对双杆切割磁感线运动过程的分析[J]. 物理教师，2011(7)：44，46