

## 对2009年高考海南卷一道计算题参考答案的商榷

黄林天扬 姜付锦

(武汉市黄陂区第一中学 湖北 武汉 430030)

(收稿日期:2017-04-01)

**摘要:**通过对2009年高考海南卷一道计算题的分析,发现如果粒子做匀速圆周运动的半径等于正方形的边长,磁场最小面积还有一种情况;若粒子匀速圆周运动的半径可以变化,则磁场的最小面积会无穷趋近于零。

**关键词:**最小面积 轨迹方程 数值模拟

## 1 题目

如图1所示,ABCD是边长为 $a$ 正方形,质量为 $m$ 的电子以大小为 $v_0$ 的初速度,沿纸面垂直于BC边上的任意一点入射,都只能从A点射出磁场,不计重力,求:

(1) 此匀强磁场区域中磁感应强度的大小和方向;

(2) 此匀强磁场区域的最小面积。

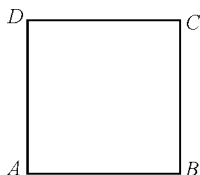


图1 题图

## 2 原题解析

原题的分析如图2所示(过程略)

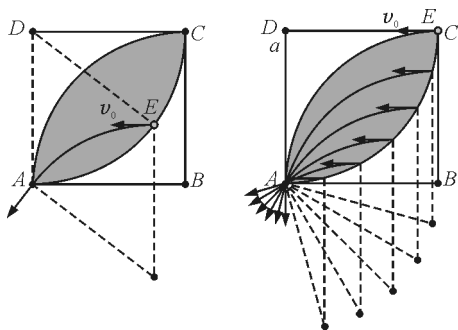


图2 参考解析

(1) 磁场方向垂直纸面向下,  $B = \frac{mv_0}{ae}$ ;

$$(2) S_{\min} = \frac{\pi - 2}{2} a^2.$$

## 3 笔者的分析

## 3.1 定性分析

当电子的飞行轨迹为一段圆弧与部分直线时,如图3所示,则磁场的面积会更小。

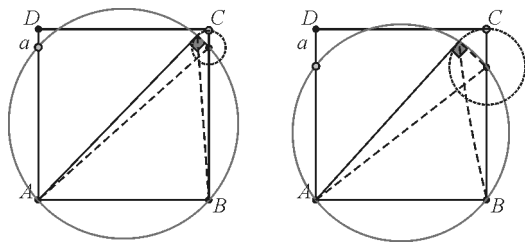


图3 定性分析

图3的小圆的部分圆弧表示带电粒子先做匀速圆周运动,直线表示做匀速直线运动。

## 3.2 定量研究一

若粒子开始做匀速圆周运动,后来做匀速直线运动,如图4所示.粒子做匀速圆周运动的半径与正方形边长相等,磁场的上边界为

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

磁场的下边界为

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a - x}{a}$$

可求得

$$y = \sqrt{\frac{x^2 (a - x)^2}{a^2 - (a - x)^2}} \quad (0 \leq x \leq a)$$

匀强磁场的区域就是这两个边界所夹的部分,其面积是

$$S = a^2 - \left(a^2 - \frac{\pi}{4}a^2\right) + \int_0^a y dx =$$

$$a^2 - 2\left(a^2 - \frac{\pi}{4}a^2\right) = \frac{\pi - 2}{2}a^2$$

与参考答案一样,但是磁场形状不同.

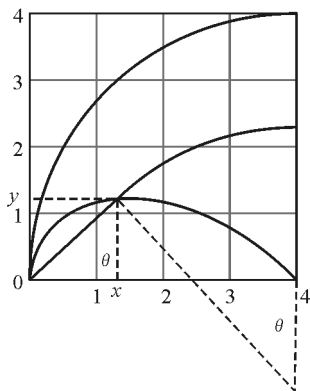


图4 定量分析一

### 3.3 定量分析二

上面分析中半径  $R$  可以变化,如图5所示,设粒子的半径为  $R(0 < R \leq a)$ ,则有

磁场的上边界为

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

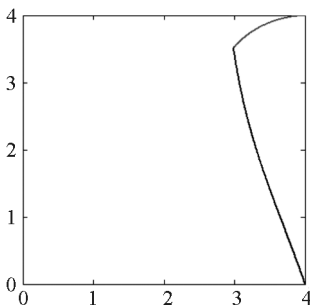


图5 定量分析二

磁场的下边界为

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a - x}{R}$$

联立可求得

$$y = \sqrt{\frac{x^2(a-x)^2}{R^2 - (a-x)^2}} \quad (0 \leq x \leq a)$$

图5中上面的曲线表示磁场的上边界,下面的曲线表示磁场的下边界,右边界与正方形的右边界重合.磁场的上边界是圆弧一部分,下边界函数  $y(x)$ ,若圆周运动半径再小一些,则磁场面积会更小.

### 3.4 定量分析三

把磁场区域整体向左平移  $a - b$ ,如图6所示, $b$ 为磁场的右边界,则磁场的下边界方程

$$y = \sqrt{\frac{x^2(b-x)^2}{R^2 - (b-x)^2}},$$

$$(0 \leq x \leq b, 0 < R \leq a, 0 \leq b \leq a - R)$$

磁场的上边界是圆弧一部分,下面是函数  $y(x)$ ,若粒子匀速圆周运动的半径趋近于零,则面积趋近于零.

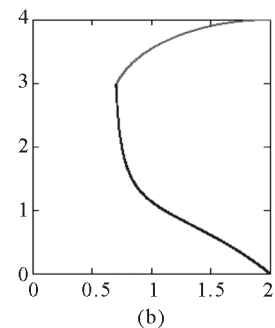
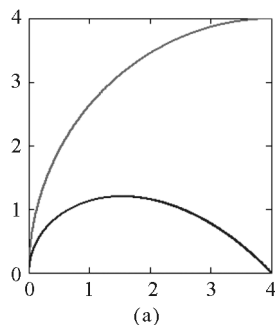


图6 定量分析三

图6(a)中的磁场边界表示带电粒子的匀速圆周运动的半径与正方形边长相等时且磁场右边界与正方形右边界重合时的情况,详细的计算表明磁场面积与参考答案是一样的;图6(b)中的磁场表示把磁场右边界向左移动2个单位时的磁场边界,此种情况下的磁场面积小于参考答案中的面积.

## 4 结语

若粒子开始做匀速直线运动,后做匀速圆周运动,半径为  $a$ ,则

$$S_{\min} = \frac{\pi - 2}{2}a^2$$

但是还有一个解;若粒子开始做匀速圆周运动后做匀速直线运动,或者开始做匀速直线运动再做匀速圆周运动最后再做匀速直线运动,而且半径可以更小,则最小磁场面积可以趋近于零.