碰撞问题的速度矩阵表达和能量损失及传递率分析*

贺西平　王成会　边小兵　卢红兵

（陕西师范大学物理学与信息技术学院　陕西 西安　710119）

（收稿日期：2017－04－21）

摘　要：以两体碰撞为例，对碰撞前后的速度关系利用矩阵作了简明表达. 全面分析了碰撞前后的能量组成及关系，阐述了资用能的物理意义，求出了能量损失、能量传递率等表达式. 本文的分析方法也可推广到多体碰撞问题中去.

关键词：能量损失　能量传递率　速度矩阵　多体碰撞

文献[1] 在不引入惯性力的前提下，讨论了两体问题中的功能原理、机械能守恒定律的应用范围. 文献[2～4]导出了两体对心碰撞的能量损失公式，指出了恢复系数实质为恢复阶段系统的动能增加值与压缩阶段中系统的动能减小值之比的平方根. 利用柯尼希定理将两体碰撞前后的能量表达为质心动能与折合质量相对速度的动能（即资用能）之和，有助于理解资用能的物理意义[5]，也能够简化处理诸如子弹穿越木块、物块在凹槽里碰撞以及外部物体与两连接弹簧碰撞等问题[6]. 碰撞的总能量，来源于碰撞前两体具有的动能，该动能除了碰撞后转化为其他形式而损失的能量外，还有碰后两体具有的动能. 其中包含有一体传递给另一体的能量，由此可求出能量的传递率，有实用价值[7,8]. 除了两体碰撞问题外，还会遇到诸如汽车连环追尾等多体碰撞的问题.

本文以两体碰撞为例，对碰撞前后的速度关系利用矩阵作了简明表达，全面分析了碰撞前后的能量组成、关系，并求出了能量损失、能量传递率表达式，由此可以更简便、更深刻地理解碰撞问题. 本文的分析方法可推广到多体碰撞问题中去.

1　碰撞前后的速度矩阵表示

假设质量 m_1 和质量 m_2 在球心方向发生一维碰撞. 因碰撞沿直线方向，速度可不用矢量而直接用正负号表示. 沿右向为正，左向为负. 如图 1 所示. 质量 m_1 碰前速度为 v_1，碰后为 v_1'. 质量 m_2 碰前速度为 v_2，碰后为 v_2'. 碰前的相对速度为 $u=v_2-v_1$，碰后的相对速度为 $u'=v_2'-v_1'$. 两体系统未受外力作用，质心速度为 v_C，恢复系数为 e.

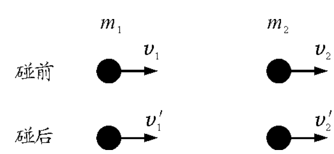

图 1　两体碰撞前后的速度

由动量守恒定律，有

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'=(m_1+m_2)v_C \tag{1}$$

恢复系数为 $e=-\dfrac{v_2'-v_1'}{v_2-v_1}$，则

$$v_2'-v_1'=-e(v_2-v_1)$$

即

$$u'=-eu \tag{2}$$

由以上两式，得到

$$v_1'=\frac{(m_1-em_2)}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}v_2$$

$$v_2'=\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}v_1+\frac{(m_2-em_1)}{m_1+m_2}v_2$$

碰撞前后速度之间的关系可用矩阵表达为

* 陕西师范大学教学改革项目资助.

作者简介：贺西平（1965－　），男，博士，教授，主要从事力学、理论力学教学和超声学研究工作.

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{m_1+m_2}\begin{bmatrix} m_1-em_2 & m_2(1+e) \\ m_1(1+e) & m_2-em_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

或者也可得到两体之间的碰前和碰后的关系

$$v_2 = \frac{(m_2 e - m_1)v_1}{m_2(1+e)} + \frac{(m_1+m_2)v_1'}{m_2(1+e)}$$

$$v_2' = \frac{e(m_1+m_2)v_1}{m_2(1+e)} + \frac{(m_2-m_1 e)v_1'}{m_2(1+e)}$$

矩阵表达为

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{m_2(1+e)}\begin{bmatrix} m_2 e-m_1 & m_1+m_2 \\ e(m_1+m_2) & m_2-m_1 e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_1' \end{bmatrix}$$

2　能量分析

碰撞前后该两体系统的动能 E_1 和 E_2 分别为

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_C^2 + \frac{1}{2}\mu u^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_C^2 + \frac{1}{2}\mu u'^2 \tag{4}$$

式中 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ 为折合质量. 即碰撞前后的动能分别等于质心动能与相应的折合质量表示的相对速度的动能之和. 前者代表两体系统对惯性系的动能，表现为“对外运动”的动能. 因不受外力作用，碰撞前后两体的质心动能相等，这部分不参与碰撞过程中能量形式的转化. 后者为两体对质心的动能，也称为“内部相对”动能，或有效动能，有的文献也称其为资用能，意思是这部分的动能将在完全非弹性和非完全弹性碰撞中可转化为其他形式的能量. 若在质心参照系中观察，即在表达式(4)中只有第二项[9]. 正确理解这点，将能简化很多问题的处理.

由此，两体系统能量损失 ΔE_k 即为碰撞前后的资用能之差

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\mu(u^2 - u'^2) = \frac{1}{2}\mu u^2(1-e)^2 \tag{5}$$

下面仔细分析一下碰撞过程中的几部分能量. 为了简化分析，假设质量 m_2 碰前速度 $v_2 = 0$. 那么，碰撞初始的总能量应是质量 m_1 具有的动能 $E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$，该能量在碰撞过程中分成了 3 部分，即

$$E = E_{1f} + E_{2g} + E_d = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 + E_d \tag{6}$$

其中，E_{1f} 为质量 m_1 碰撞后的动能，E_{2g} 为质量 m_2 碰后得到的能量，E_d 为碰撞过程中转换成其他形式的能量.

由式(3)可得

$$E_{1f} = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 = \frac{1}{2}m_1\left[\frac{(m_1-em_2)}{m_1+m_2}v_1\right]^2 = \left[\frac{(m_1-em_2)}{m_1+m_2}\right]^2 E \tag{7}$$

$$E_{2g} = \frac{1}{2}m_2\left[\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}v_1\right]^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2(1+e)^2}{(m_1+m_2)^2}E \tag{8}$$

结合式(6)～(8)，碰撞过程中转换成其他形式的能量 E_d 为

$$E_d = E - E_{1f} - E_{2g} = \frac{m_2(1-e)^2}{m_1+m_2}E = \frac{1}{2}\mu u^2(1-e)^2$$

比较式(5)，知 $E_d = \Delta E_k$，即与碰撞前后系统的资用能之差相等. 若为完全非弹性碰撞，$e=0$，式(4)中两体碰前的资用能 $\frac{1}{2}\mu u^2$ 将在碰撞过程中全部转化为其他形式的能量.

质量 m_1 传递给 m_2 的动能 E_{2g} 与质量 m_1 的动能之比，即能量的传递率 η 为

$$\eta = \frac{E_{2g}}{E} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2(1+e)^2}{(m_1+m_2)^2} \tag{9}$$

令 $t = \frac{m_1}{m_2}$，则

$$\eta = \frac{E_{2g}}{E} = \frac{t(1+e)^2}{2(1+t)^2}$$

式中 e 为恢复系数，其值介于 0 与 1 之间. 能量的传递率 η 与质量比 t 及恢复系数有关. 为使得 η 达到最大，对上式进行如下讨论：

(1) 若两球质量比 t 为恒定值，则 $e=1$ 时，即完全弹性碰撞时，能量传递率达到最大，完全非弹性碰撞 $e=0$ 时能量传递率最小；

(2) 若 e 值恒定，求导 $\frac{d\eta}{dt} = \frac{1-t}{(1+t)^3}(1+e)^2$，

$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{2t-4}{(1+t)^4}(1+e)^2$. 一阶导在 $t=1$ 处为零,二阶导在此处小于零,为极大值点. 此时 $m_1=m_2$ 时,动能的传递率最大.

需要注意的是,碰撞过程中传递能量,或说是被碰撞质量获得的动能 E_{2g} 与转换成其他形式的能量 E_d 是两个概念.

以上分析对多体碰撞也是适用的. 例如,质量 m_1 碰撞质量 m_2,质量 m_2 随后碰撞质量 m_3. 碰前速度为 v_1 的质量 m_1 碰撞速度为 v_2 的质量 m_2,两者碰后的速度分别为 v_1' 和 v_2',质量 m_2 再与速度为 v_3 的质量 m_3 碰撞,碰后的速度分别为 v_2'' 和 v_3',如图 2 所示.

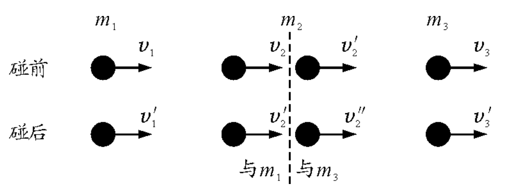

图 2　三体碰撞前后的速度

根据式(3),质量 m_2 的碰前和碰后与质量 m_1 的碰前和碰后速度之间的关系为

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}=\frac{1}{m_1+m_2}\begin{bmatrix} m_1-e_1m_2 & m_2(1+e_1) \\ m_1(1+e_1) & m_2-e_1m_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

式中 e_1 为 m_1 和 m_2 之间碰撞恢复系数.

同理,质量 m_3 的碰前和碰后与质量 m_2 的碰前和碰后速度之间的关系为

$$\begin{bmatrix} v_2'' \\ v_3' \end{bmatrix}=\frac{1}{m_2+m_3}\begin{bmatrix} m_2-e_2m_3 & m_3(1+e_2) \\ m_2(1+e_2) & m_3-e_2m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2' \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中 e_2 为 m_2 和 m_3 之间碰撞恢复系数.

由(10)、(11)两式,可得 v_1',v_2'' 和 v_3' 分别为

$$v_1'=\frac{(m_1-em_2)}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}v_2$$

$$v_2''=\frac{m_1(1+e_1)(m_2-e_2m_3)}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_1+\frac{(m_2-e_1m_1)(m_2-e_2m_3)}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_2+\frac{m_3(1+e_2)}{m_2+m_3}v_3$$

$$v_3'=\frac{m_1m_2(1+e_1)(1+e_2)}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_1+\frac{m_1m_2^2e_1(1+e_2)}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_2+\frac{m_3-m_2e_2}{m_2+m_3}v_3$$

能量关系依上可进行类似的分析.

3　小结

本文以两体碰撞为例,全面分析了碰撞前后的能量组成及关系,利用矩阵对碰撞前后的速度关系作了简明表达. 碰撞过程中转化为其他形式的能量与碰撞前后系统的资用能之差相等. 若为完全非弹性碰撞,碰前的资用能将在碰撞过程中全部转化为其他形式的能量.

利用推导的碰撞前后的速度矩阵关系式,对碰撞过程中能量的传递率进行了分析,即碰撞球(物)体传递给被碰撞球(物)体的动能与碰前碰撞球(物)体所携带的动能之比. 若两球质量比为恒定值,发生完全弹性碰撞时,能量传递率最大,完全非弹性碰撞时能量传递率最小. 若恢复系数为恒定值,当两碰撞球体的质量相等时,动能的传递率为最大.

利用推导的碰撞前后的速度矩阵关系式,也容易分析多体碰撞问题中的能量关系以及碰撞物体从前到后的能量传递率.

参考文献

1　白静江. 两体问题中的功能原理及机械能守恒定律. 大学物理,1997,16(3):11～14

2　刘超. 两体对心碰撞能量损失问题初探. 物理教学探讨,2004,22(213):51～52

3　王长春. 从能量的角度讨论两体碰撞问题. 大学物理,2005,24(9):18～22

4　M F Ferreira da Silva. Meaning and usefulness of the coefficient of restitution. Eur J Phys,2007,28(6):1 219～1 232

5　陈钢,阮中中. 柯尼希定理运用于两体问题的讨论. 物理与工程,2010,20(1):21～22,31

6　范继美. 两体问题中的折合质量. 昆明工学院学报,1992,17(2):121～128

7　Marián Kireš. Astroblaster - a fascinating game of multi - ball collisions. Phys Edu,2009,44(2),159～164

8　BernardRicardo,Paul Lee. Maximizing kinetic energy transfer in one - dimensional many - body collisions, Eur J Phys,2015,36(2):1～12

9　蔡支坤,王笑君. 运用质心系解决两体碰撞问题. 物理通报,2016(2):8～10

(下转第 34 页)

Talking about the Newton′s Law and the Reference System

Hu Min　Guo Changjiang　Gu Feng

(Mathematics & Science College of Shanghai Narmal University, Shanghai　200234)

Abstract: This paper briefly sorts out the relationship between Newton′s law and the reference system. Firstly, Newton′s first law is used to analyze the essential difference between the inertial reference system and the non - inertial reference system. Then, based on the understanding of Newton′s second law, the relationship between the inertial reference system and the translational non - inertial reference system is analyzed from the distinction and contact between '$\boldsymbol{F}=m(\boldsymbol{a}_{相}+\boldsymbol{a}_{参})$ 'and '$\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a}_{参}=m\boldsymbol{a}_{相}$'. And the physical meaning of the inertial forces in the rotatingnon - inertial reference system is explained. Finally, it is pointed out that Newton′s third law has nothing to do with the selection of the reference system.

Key words: Newton′s law; inertial reference system; non - inertial reference system; inertial forces

(上接第 29 页)

Analysis on Velocity Matrix Representation, Energy Loss and Transfer Rate of Impact Issue

He Xiping　Wan Chenhui　Bian Xiaobing　Lu Hongbing

(Shaanxi Normal University, School of Physics Information Technology, Xi′an, Shaanxi　710119)

Abstract: Taking the two — body collision as an example, the relation of bodies velocity between before and after collision is concisely expressed in matrix form. The component parts of collision energy of the bodies and their relations between before and after collision are analyzed thoroughly and the physical meaning of available energy is elaborated, furthermore, expressions of the loss of energy and the energy transfer rate are derived. The analysis method described here may be adopted for many - body collisions issues.

Keywords: loss of energy; energy transfer rate; velocity matrix; many - body collisions