

# 分离变量法教学内容优化及本征值问题引入方式研究

姜向前 孟庆鑫 张宇

(哈尔滨工业大学物理系 黑龙江 哈尔滨 150001)

(收稿日期:2017-05-04)

**摘要:** 现有数学物理方法教学体系中,分离变量法在前,本征值问题在后.而分离变量过程中,又涉及到本征值问题.这样的安排导致学生在学习分离变量法过程中,不能很好地理解本征值问题是分离变量法的基础,不利于学生严密逻辑思维能力的培养.针对这个问题我们开展了分离变量法教学内容优化的研究,提出一种更有利于学生严密逻辑思维能力的培养的分离变量法教学方案.将本征值问题提前,将其置于定解问题之后、分离变量法之前.进而,为避免直接引入 Sturm - Liouville 方程而导致的突兀性问题,给出了分离变量法教学顺序调整后的 Sturm - Liouville 方程的引出方案.

**关键词:** 分离变量法 本征值问题 教学内容优化

数学物理方法是物理系的主干课程之一,是一门利用数学语言描述并解决自然科学及工程技术中所遇到的一些问题、建立定解问题、求解定解问题的专业基础课.课程的教学目的是通过课程的学习进

一步提高学生的数学素养和应用数学知识解决复杂物理问题的能力,为理论物理课程的学习打下牢固的基础.但现有的教材内容体系存在一些问题,不利于学生严密思维能力的培养.我们知道,求解定解问

## Rethinking on the Adiabatic Process of Ideal Gas from Microcosmic Perspective

Qin Tian Yang Tianyi Yang Chenglin Li JingYi He LanXin Huang Min

(Mingzhang Institution of Xindu No.1 High School, Chengdu, Sichuan 610500)

Zhao Yunhe

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

**Abstract:** The paper "Deducing adiabatic equation of ideal gas via kinetic theory of gas" (College Physics March 2017) mentioned a microcosmic way to calculate the ideal gas adiabatic formula, the physical nature of this derivation is the collective effect of the gas molecules on the piston wall, that is, the microscopic interpretation of the gas pressure. Based on this point, this paper gives the corresponding derivation from the perspective of the external work of gas molecules, and finds a more intuitive solution in its given model and correspond more directly to the first law of thermodynamics. Thus more directly links itself to the micro - process and macroscopic ideal gas state equation.

**Key words:** ideal gas; adiabatic process; microcosmic work

题的一个基本方法是分离变量法,而决定能否进行分离变量的基础是本征值问题.现有几乎所有教材都是将本征值问题置于分离变量法之后.分离变量过程中涉及本征值问题,但由于本征值问题教学内容在后,导致学生并不能体会到本征值问题存在与否才是决定能否进行分离变量的关键.

关于本征值问题大部分教材都是按照梁昆森先生的数学物理方法的内容体系讲解的.首先是建立定解问题,然后是利用分离变量法求解定解问题,分离变量法之后引入本征值问题<sup>[1]</sup>.华中师范大学汪德新教授的数学物理方法与梁昆森先生的教材顺序一致将本征值问题放到了分离变量法之后<sup>[2]</sup>.北京大学吴崇试教授的数学物理方法将本征值问题放在了分离变量法总结这一部分即柱函数之后<sup>[3]</sup>,相对于梁昆森先生的教材更加靠后.武汉大学姚端正教授对数学物理方法的教学内容进行了较大调整,将本征值问题放到了全书的最后一章<sup>[4]</sup>.南京大学的邵惠民教授的数学物理方法将本征值问题提到分离变量法之前,甚至在Fourier与Laplace变换之前.虽然本征值问题提前到分离变量法之前,但引出方式与其他教材仍相同,都是直接给出Sturm-Liouville方程,进而给出本征值问题的定义<sup>[5]</sup>.为了避免学生在学习分离变量法过程中一直带有什么是本征值问题的疑问,我们尝试对分离变量法的教学内容进行优化.将本征值问题提至分离变量法之前,并尝试解决Sturm-Liouville方程直接引入的突兀性问题.

将S-L本征值问题提到分离变量法之前,对本征值问题的概念、性质及其应用进行透彻的阐明,使学生在进入分离变量法之前对本征值问题已有深入的了解,并使学生能够对本征函数法展开的理解更加清晰、流畅.为了解决教学顺序调整后过于复杂的问题,采取由一般的线性齐次偏微分方程导出Sturm-Liouville方程的方式<sup>[6]</sup>.

对于一般的二阶线性齐次偏微分方程

$$L_t u + L_x u = 0 \quad (1)$$

其中 $L_t$ 与 $L_x$ 是二阶线性偏微分算子

$$L_t = a_0(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1(t) \frac{\partial}{\partial t} + a_2(t) \quad (2)$$

$$L_x = b_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + b_2(x) \quad (3)$$

其中 $a_i(t)$ 和 $b_i(x)$ ( $i=0,1,2$ )是已知函数.设 $u(x, t) = T(t)X(x)$ ,将其代入方程(1)得

$$X(x)L_t T(t) + T(t)L_x X(x) = 0 \quad (4)$$

方程两边同除 $T(t)X(x)$ 得

$$\frac{L_t T(t)}{T(t)} + \frac{L_x X(x)}{X(x)} = 0 \quad (5)$$

方程(5)中第一项仅是 $t$ 的函数,第二项仅是 $x$ 的函数,因此上式若成立第一项和第二项都应为一常数.令 $\frac{L_x X(x)}{X(x)} = -\lambda$ ,则得到两个常微分方程

$$L_x X(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (6)$$

$$L_t T(t) - \lambda T(t) = 0 \quad (7)$$

令 $X(x) = y(x)$ ,由方程(3)和方程(6)得

$$\begin{aligned} b_0(x)y''(x) + b_1(x)y'(x) + \\ b_2(x)y(x) + \lambda y(x) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

选取适当的函数 $\rho(x)$ 使得

$$[\rho(x)b_0(x)]' = \rho(x)b_1(x) \quad (9)$$

整理得

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = -\frac{b_0'(x)}{b_0(x)} + \frac{b_1(x)}{b_0(x)} \quad (10)$$

由方程(10)可得

$$\rho(x) = \frac{1}{b_0(x)} \exp \left[ \int \frac{b_1(x)}{b_0(x)} dx \right] \quad (11)$$

将方程(8)两边同乘 $\rho(x)$ 得

$$\begin{aligned} \rho(x)b_0(x)y''(x) + [\rho(x)b_0(x)]'y'(x) + \\ b_2(x)\rho(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

令

$$k(x) = \rho(x)b_0(x) \quad -q(x) = \rho(x)b_2(x)$$

则方程(12)可写为

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y + \lambda\rho(x) = 0 \quad (13)$$

方程(13)称为Sturm-Liouville方程,其中 $\lambda$ 是与变量 $x$ 无关的常数,而 $k(x)$ , $q(x)$ 和 $\rho(x)$ 通常都假定是实变函数.为了保证解的存在又设 $q(x)$ 和 $\rho(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上是连续的,而 $k(x)$ 在 $(a, b)$ 上

满足连续可微.至此,我们完成了由一般二阶线性齐次偏微分方程引出 Sturm-Liouville 方程,避免了直接给出 Sturm-Liouville 方程的突兀性问题. Sturm-Liouville 方程附以第一、二或三类齐次边界条件或自然边界条件则构成 Sturm-Liouville 本征值问题.进而,给出本征值问题的共同性质即所有本征值是非负的,对应与不同本征值的本征函数是正交的,而且所有的本征函数构成一个完备正交系.

本文针对数学物理方法中分离变量法的教学内容逻辑性进行了研究,提出了一种更有利于学生严密逻辑思维能力培养的教学方案.鉴于分离变量过程贯穿整个数学物理方程始终,而本征值问题又是分离变量能否进行的关键,因此将本征值问题提至分离变量法之前,解决了原教学体系中不能很好体会到本征值问题是分离变量法的关键的问题.通过将本征值问题提前使分离变量法的内容逻辑性

更强,更易学生接受和掌握.针对本征值问题提前而带来的复杂数学公式直接给出的突兀性问题,由一般的二阶线性齐次偏微分方程出发给出了本征值问题的引出方案.通过本征值问题与分离变量法教学顺序的调整,将使学生在进入分离变量法学习之前已对本征值问题有深入的了解,使学生对后续内容不同坐标系下的分离变量、本征函数法展开有更深入的理解.

#### 参考文献

- 1 梁昆森. 数学物理方法. 北京:高等教育出版社,2009
- 2 汪德新. 数学物理方法. 北京:科学出版社,2006
- 3 吴崇试. 数学物理方法. 北京:北京大学出版社,2005
- 4 姚端正. 数学物理方法. 北京:科学出版社,2010
- 5 邵惠民. 数学物理方法. 北京:科学出版社,2010
- 6 严镇军. 数学物理方法. 合肥:中国科学技术大学出版社,2006

## The Optimizing of Teaching Content for the Separation Variables Method and Research on the Introduction Mode of the Eigenvalue Issue

Jiang Xiangqian Meng Qingxin Zhang Yu

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001)

**Abstract:** The method of separation of variables in the first eigenvalue problem last in present teaching system of mathematical physical methods, which leads to the students are not well understand that the foundation of the method of separation of variables is eigenvalue problem, and is not conducive to develop the strict logical thinking ability. We carry out the study of optimization of teaching contents, and present a more favorable solution to develop student's logical thinking ability. We introduce the eigenvalue problem before the method separation of variables, and present the introducing scheme of Sturm-Liouville equation to avoiding the abrupt appearance of Sturm-Liouville equation.

**Key words:** method of separation of variables; eigenvalue problem; teaching content optimizing