

一道高考压轴题提示信息的深度探秘

蒋金团

(云南省保山市施甸县第一完全中学 云南 保山 678200)

牛云景

(昆明市西山区第一中学 云南 昆明 650106)

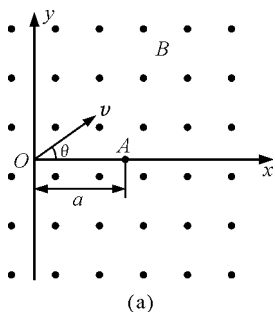
(收稿日期:2017-06-08)

摘要:先采用微分方程法对2013年高考福建压轴题的提示信息进行了深度探秘,再用配速法求出粒子的最大速度.

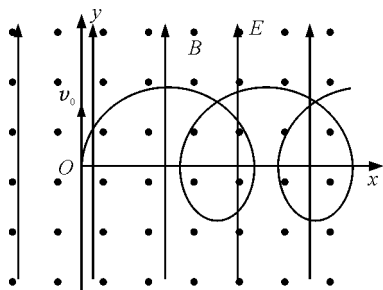
关键词:高考 复合场 微分方程 配速法

1 问题的提出

【题目】(2013年高考福建卷第22题)如图1(a)所示,空间存在一范围足够大的垂直于 xOy 平面向外的匀强磁场,磁感应强度大小为 B .让质量为 m ,电荷量为 $q(q > 0)$ 的粒子从坐标原点 O 沿加 xOy 平面以不同的初速度大小和方向入射到该磁场中.不计重力和粒子间的影响.



(a)



(b)

图1 题图

(1) 若粒子以初速度 v_1 沿 y 轴正向入射,恰好能经过 x 轴上的 $A(a, 0)$ 点,求 v_1 的大小;

(2) 已知一粒子的初速度大小为 $v(v > v_1)$.为

使该粒子能经过 $A(a, 0)$ 点,其入射角 θ (粒子初速度与 x 轴正向的夹角)有几个?并求出对应的 $\sin \theta$ 值;

(3) 如图1(b)所示,若在此空间再加入沿 y 轴正向、大小为 E 的匀强电场,一粒子从 O 点以初速度 v_0 沿 y 轴正向发射.研究表明:粒子在 xOy 平面内做周期性运动,且在任一时刻,粒子速度的 x 分量 v_x 与其所在位置的 y 坐标成正比,比例系数与场强大小 E 无关.求该粒子运动过程中的最大速度值 v_m .

【参考答案】

$$(1) \frac{qBa}{2m};$$

$$(2) \sin \theta = \frac{aqB}{2mv};$$

$$(3) v_m = \frac{E}{B} + \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + v_0^2}.$$

点评分析:这道题的难点是第(3)问,该问考查带电离子在电磁叠加场中的摆线运动.很多学生处理曲线运动的第一直觉是正交分解,但摆线运动不像抛物运动那般简单,它的两个分运动是变加速曲线运动,没有现成的公式可用,为了避开这一难点,命题者给出了一个重要的提示信息:在任一时刻,粒子速度的 x 分量 v_x 与其所在位置的 y 坐标成正比,比例系数与场强大小 E 无关.运用该信息的难点是比例系数的求解,参考答案的做法是紧紧抓住比例系数与电场无关,令 $E=0$,利用磁场中的圆周运动求出比例系数再代回电磁叠加场中求最大速度.一

些物理同行觉得这个提示匪夷所思,他们认为有电场时和无电场时的比例系数相同难以接受,因此探讨这个提示信息是很有必要的.

2 用微分方程法探究提示信息

粒子运动到 $P(x, y)$ 点时,其受力情况如图2所示,根据牛顿第二定律,在 x 轴方向上有

$$qBv_y = m \frac{dv_x}{dt} \quad (1)$$

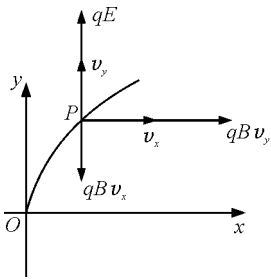


图2 粒子运动到 P 点受力情况

在 y 方向上有

$$qE - qBv_x = m \frac{dv_y}{dt} \quad (2)$$

式(2)两边求导

$$-qB \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2 v_y}{dt^2} \quad (3)$$

联立式(1)、(3)得

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = 0 \quad (4)$$

式(4)通解为

$$v_y = C_1 e^{at} \cos \beta t + C_2 e^{at} \sin \beta t = C_1 \cos \frac{qB}{m} t + C_2 \sin \frac{qB}{m} t \quad (5)$$

联立式(2)、(5)得

$$v_x = \frac{E}{B} + C_1 \sin \frac{qB}{m} t - C_2 \cos \frac{qB}{m} t \quad (6)$$

将初始条件 $t=0, v_x=0, v_y=v_0$ 代入(5)、(6)两式得

$$C_1 = v_0 \quad C_2 = \frac{E}{B} \quad (7)$$

对式(5)积分得

$$y = \int_0^t v_y dt = \frac{m}{qB} \left(C_1 \sin \frac{qB}{m} t - C_2 \cos \frac{qB}{m} t + C_2 \right) \quad (8)$$

联立式(6)、(7)得

$$v_x = \frac{E}{B} + \frac{qB}{m} y - C_2 = \frac{qB}{m} y$$

显然式中的比例系数为 $\frac{qB}{m}$,该系数确实与电场强度无关,题目的提示条件是完全正确的.

需要说明的是,上述推导过程用到了微分知识,大多数高中生很难接受,因此接下来采用另一种既避开微分方程也避开提示信息的方法求最大速度.

3 用配速法求速度最大值

带电粒子在正交的匀强磁场和匀强电场运动,若所受的电场力和洛伦兹力不平衡而做复杂的曲线运动时,将粒子的初速度 v_0 分解成 v_1 和 v_2 ,令 v_1 对应的洛伦兹力 qBv_1 抵消电场力,则复杂曲线运动等效成是速率为 v_1 的匀速直线运动和速率为 v_2 的圆周运动的合运动.

如图3所示,由约束关系得

$$qE = qv_1 B$$

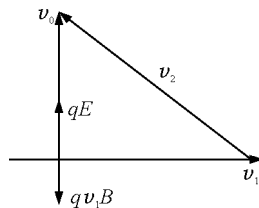


图3 几个物理量的约束关系

即

$$v_1 = \frac{E}{B}$$

由勾股定理得

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{E}{B}\right)^2}$$

当圆周运动的速度和匀速直线运动的速度同向时,粒子的速度最大

$$v_{\max} = v_1 + v_2 = \frac{E}{B} + \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{E}{B}\right)^2}$$

4 小结

由此题的解决可以得到一些启示:教师在平常的教学中,不能仅停留在对学生进行知识的灌输,反反复复讲解等车轮战术,学生对教学知识的掌握是教师教学的起点而非终点,熟练应用教学中学到的方法解决实际问题才是最终的目的.所以教师要努力在教学中将思想、方法、知识和技能有机结合起来,积极实践新课程精神,将核心素养落实到每一节课,学生的能力才能真正得以提高.