



圆形区域变化磁场激发 涡旋电场的问题剖析及案例分析

黄绍书 王金霞

(六盘水市第23中学 贵州 六盘水 553000)

(收稿日期:2017-05-18)

摘要:剖析涡旋电场的分布以及涡旋电场中非导体约束和导体约束条件下的电势问题,给出在限定的圆形区域内均匀变化磁场中的涡旋电场、感生电动势与电势的分布规律,以及在这限定的圆形区域内均匀变化的磁场中,非导体约束和导体约束条件下电势的计算与比较.通过在涡旋电场中对电源、电势及电压等概念的引入,澄清了一些在大学物理教学中涉及涡旋电场的容易模糊、难于理解的概念.对涡旋电场的—个具体案例进行了详细分析.

关键词:感生电动势 涡旋电场 非导体约束 导体约束 案例分析

1 引言

根据法拉第电磁感应定律和麦克斯韦电磁理论,当某一固定回路 L 所围的面积为 S 的区域由于磁感应强度 B 发生变化引起其磁通量 Φ 变化时,将产生感生电动势(以下简称电动势) ϵ 并在磁场区域及其周围空间激发出涡旋电场 $E_{\text{旋}}$ ^[1].并且, ϵ 与 $E_{\text{旋}}$ 之间的关系为

$$\epsilon = \oint_{(L)} \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{SdB}{dt} \quad (1)$$

显然

$$\oint_{(L)} \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} \neq 0 \quad (2)$$

这就表明,涡旋电场 $E_{\text{旋}}$ 是非保守场即非势场.正因如此,通常认为在涡旋电场中引入电势的概念势必没有多大的意义和价值.

但是,为了便于对问题的说明和表述,本文在对涡旋电场的分析与讨论中,依然引入了电势这一概念.

关于涡旋电场及其中的电势分布问题,尚未有图书文献给出具体说明,因而,长期以来这一问题总是教学中研讨的课题.期刊文献对这方面的讨论是比较丰富的,截今为止,已发表的专业期刊文献^[2~7]已有数百篇,它们从不同的侧面和角度对这一问题进行了很有价值的研讨,其中最为普遍的讨论是目前存在诸多争议的问题,也就是涡旋电场中导体存

在与否对电势分布的影响问题.

2 两个问题剖析

这里先对本文中涉及的导体约束和非导体约束两个概念进行界定.其中,导体约束是指涡旋电场建立在导体中,其电场和电势分布除与限定的变化磁场区域分布有关外,还要受到导体回路的约束.而非导体约束是指涡旋电场建立在真空(空气)中,其电场和电势分布只与限定的变化磁场区域分布有关.

2.1 涡旋电场的分布

这里仅着重分析变化磁场限定在一圆形区域之内,并且没有导体回路约束的情况.

如图1所示,设变化磁场为限定在半径为 R_0 的圆形区域(图中虚线圆)内的均匀磁场,并假定该磁场以 $\frac{\Delta B}{\Delta t} = k$ 均匀增强,那么由式(1)可得,以磁场区域中心为圆心、半径为 r 的回路(图中实线圆)中的电动势大小(下同)为

$$\epsilon = \frac{S\Delta B}{\Delta t} = \begin{cases} k\pi r^2 & (r < R_0) \\ k\pi R_0^2 & (r \geq R_0) \end{cases} \quad (3)$$

相应回路的涡旋电场为

$$E_{\text{旋}} = \begin{cases} \frac{k\pi r^2}{2\pi r} = \frac{kr}{2} & (r < R_0) \\ \frac{k\pi R_0^2}{2\pi r} = \frac{kR_0^2}{2r} & (r \geq R_0) \end{cases} \quad (4)$$

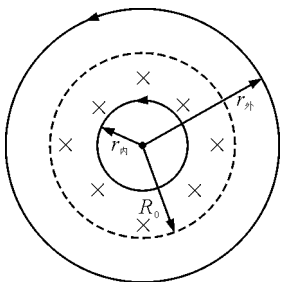


图1 变化的磁场限定在一圆形区域内

很显然,式(3)说明,当 $r < R_0$ 时, ϵ 与 r^2 成正比;当 $r \geq R_0$ 时, ϵ 为一个定值. 而式(4)则说明,当 $r < R_0$ 时, $E_{旋}$ 与 r 成正比;当 $r \geq R_0$ 时, $E_{旋}$ 与 r 成反比.

这里要说明一点,在有导体回路约束的条件下,若导体回路是以变化磁场的圆形区域中心为圆心的电阻线密度相同的均匀导体回路,那么,电动势和涡旋电场的变化规律仍然分别由式(3)、式(4)确定. 其余情况下导体回路中的电动势和涡旋电场,由式(1)根据回路所围的磁场区域面积以及回路总长等实际情况确定.

2.2 涡旋电场中的电势

在如图1所示的模型中,任意回路中每一部分都相当于一个电动势很小的电源. 若将某一回路分为弧长相等的 n 等分,各等分的电动势分别为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$, 那么,该回路的电动势可表为

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n \quad (5)$$

现分两类情况来说明涡旋电场中的电势问题.

2.2.1 非导体约束

这里将没有导体约束即非导体约束条件下的涡旋电场回路称为非约束回路,每个非约束回路都是以变化磁场中心为圆心的圆形回路,如图2所示. 这时,式(5)中各等分电动势相等,即

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n = \frac{\epsilon}{n} \quad (6)$$

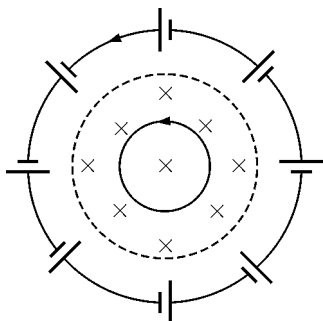


图2 非约束回路

因此,同一非约束回路上的各点电势相等. 如果以变化磁场中心的电势为零,那么,各非约束回路的

电势可表示为

$$\varphi = \begin{cases} k\pi r^2 & (r < R_0) \\ k\pi R_0^2 & (r \geq R_0) \end{cases} \quad (7)$$

即各非约束回路的电势就等于相应回路的电动势.

2.2.2 导体约束

同理,将有导体约束条件下的涡旋电场回路称为约束回路. 事实上,约束回路就是涡旋电流回路.

先考虑约束回路是以变化磁场的圆形区域中心为圆心的圆形回路情形. 仍然将某一回路分为电动势相等的 n 等分,即各等分的电动势仍符合式(6)的关系. 这时,若回路电阻密度不尽相同,那么在沿着涡旋电流的方向,每个等分的电阻电压降与相应的小电源电动势就不尽相等,因此,每个等分前后两端的电势就可能不相等. 为了便于说明问题,设在如图3所示的模型中,某一回路上除 P 与 Q 之间的部分外,其余各部分的电阻线密度都相等,令 P, Q 之间的电阻为 R_i , 电压降为 ΔU_i , 电动势为 ϵ_i , 其余各部分的电阻均为 R , 那么

$$\varphi_P \begin{cases} = \varphi_Q & (R_i = R, \Delta U_i = \epsilon_i) \\ > \varphi_Q & (R_i > R, \Delta U_i > \epsilon_i) \\ < \varphi_Q & (R_i < R, \Delta U_i < \epsilon_i) \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\Delta U_i = \frac{\epsilon R_i}{(n-1)R + R_i} \quad (9)$$

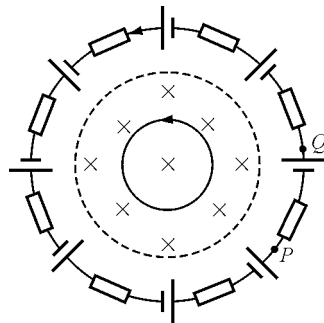


图3 约束回路

当 $R_i = R$ 时, $\Delta U_i = \epsilon_i, \varphi_P = \varphi_Q$ 的情况,同一回路上的各点电势相等,不同回路的电势仍然由式(7)确定.

当约束回路处于以变化磁场的圆形区域中心为圆心的两个圆周上时,可将约束回路简化成如图4所示的模型,即一部分在 L_1 圆周上,一部分在 L_2 圆周上. 设两部分的电动势和电阻分别为 ϵ_1 和 R_1 及 ϵ_2 和 R_2 , 那么,由式(1)或式(3)可得

$$\epsilon_1 = \begin{cases} k_1 k \pi r_1^2 & (r_1 < R_0, k_1 < 1) \\ k_1 k \pi R_0^2 & (r_1 \geq R_0, k_1 < 1) \end{cases} \quad (10)$$

$$\epsilon_2 = \begin{cases} k_2 k \pi r_2^2 & (r_2 < R_0, k_2 < 1) \\ k_2 k \pi R_0^2 & (r_2 \geq R_0, k_2 < 1) \end{cases} \quad (11)$$

式(10)、(11)中, k_1 和 k_2 分别是约束回路在 L_1 上的弧长与 L_1 的周长之比及约束回路在 L_2 上的弧长与 L_2 的周长之比, r_1 和 r_2 分别是 L_1 和 L_2 的圆周半径。

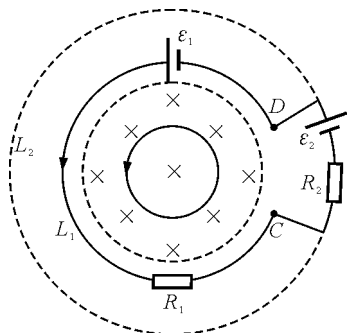


图4 约束回路简化模型

图4中C、D两点的电势关系由 R_1, R_2 的电压降 $\Delta U_1, \Delta U_2$ 以及约束回路的两部分电动势 ϵ_1, ϵ_2 共同确定。不难看出

$$\varphi_C = \varphi_D + \epsilon_1 - \Delta U_1$$

或

$$\varphi_D = \varphi_C + \epsilon_2 - \Delta U_2 \quad (12)$$

因此, 仿照前述图3模型的分析方法, 容易得出

$$\varphi_C \begin{cases} = \varphi_D & (\epsilon_1 = \Delta U_1 \text{ 或 } \epsilon_2 = \Delta U_2) \\ > \varphi_D & (\epsilon_1 > \Delta U_1 \text{ 或 } \epsilon_2 < \Delta U_2) \\ < \varphi_D & (\epsilon_1 < \Delta U_1 \text{ 或 } \epsilon_2 > \Delta U_2) \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta U_1 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{R_1 + R_2} R_1 = \frac{\epsilon R_1}{R_1 + R_2} \\ \Delta U_2 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{\epsilon R_2}{R_1 + R_2} \end{cases} \quad (14)$$

3 一个案例分析

电子感应加速器是涡旋电场在非导体约束条件下的典型应用。在近期和过去的较长时间, 好几个物理 Q 群都热议一道关于电子感应加速器的应用题, 但未得出合理的结果。

【题目】 电子感应加速器是利用变化的磁场来加速电子的装置, 如图5所示。电子绕平均半径为 R 的圆环轨道(位于真空管道内)运动, 磁感应强度方向与环形轨道平面垂直, 电子被感应电场加速, 感应电场方向与环形轨道相切。设电子电荷量为 e , 环形轨道上的磁感应强度大小的增加率为 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$, 环形轨道内的平均磁感应强度大小的增加率为 $\frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t}$ 。

(1) 求环形轨道上的感应电场在轨道切线方向上作用在电子上的力;

(2) 试导出在环形轨道内感应电场在轨道切线方向上作用在电子上的力与 $\frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t}$ 的关系;

(3) 为了使电子在不断增强的磁场中沿着半径不变的圆轨道加速运动, 求 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ 和 $\frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t}$ 之间必须满足的定量关系。

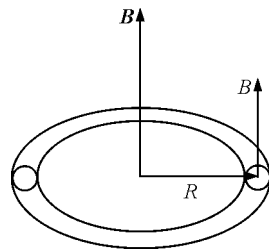


图5 题图

分析与解: 电子感应加速器工作过程中, 环形轨道上的变化磁场对电子的洛伦兹力指向轨道中心, 提供电子做变速圆周运动的向心力, 而环形轨道上及环形轨道内的感应涡旋电场对电子的作用力都沿环形轨道的切线方向, 因此, 对电子起到加速作用。

(1) 设某时刻电子做圆周运动的环形轨道上垂直于环形轨道平面的磁感应强度为 B , 电子运动的速度大小为 v , 那么

$$evB = m \frac{v^2}{R} \quad (15)$$

即

$$mv = eBR \quad (16)$$

显然, 只要满足

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = eR \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad (17)$$

即电子的动量随磁感应强度成比例增加, 就可以维持电子在一定的轨道运动。环形轨道上的感应电场在轨道切线方向上作用在电子上的力为

$$F'_{\text{切向}} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = eR \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad (18)$$

(2) 由式(1)或式(3)可得, 电子运动的环形轨道上的感生电动势为

$$\epsilon = \frac{S \Delta \bar{B}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t} \pi R^2 \quad (19)$$

因为, 电子运动一周过程中, 涡旋电场所做的功为

$$W = F'_{\text{切向}} \cdot 2\pi R = eE_{\text{旋}} \cdot 2\pi R = e\epsilon \quad (20)$$

所以, 环形轨道平面上感应电场对电子的作用力为

$$F''_{\text{切向}} = \frac{eR}{2} \frac{\overline{\Delta B}}{\Delta t} \quad (21)$$

(3) 电子在加速运动过程中, 根据牛顿第二定律, 有

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = eE_{\text{旋}} = \frac{e\varepsilon}{2\pi R} \quad (22)$$

综合式(19)和式(22), 得

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{eR}{2} \frac{\overline{\Delta B}}{\Delta t} \quad (23)$$

比较式(17)与式(23), 即可得 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ 和 $\frac{\overline{\Delta B}}{\Delta t}$ 之间的定量关系为

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{\Delta B}}{\Delta t} \quad (24)$$

4 结论

通过本文的上述分析, 可以得出以下一些结论. 当然这些结论以及上述给出的一些算法的描述可能不是很清楚, 还期待进一步的讨论.

(1) 感生电动势的非静电力是涡旋电场对自由电荷的作用力, 这与动生电动势的非静电力即洛伦兹力的来源有本质的区别.

(2) 根据图2、图3、图4的模型, 可以这样理解, 涡旋电场产生的同时, 也伴随激发出了静电场. 因此, 涡旋电场与静电场往往是同时并存的.

(3) 在涡旋电场中引入电势的概念是很有必要

和极有意义的, 特别在有导体约束回路中, 由于存在电压降, 电势概念更显得尤为重要.

(4) 涡旋电场中的电势分布还与变化磁场区域的空间分布状况有关, 变化磁场区域若为非圆形分布, 那么其电势分布的计算过程要复杂得多^[8].

(5) 电子感应加速器中, 电子的加速动力由式(18)和式(21)中两个切线方向的感应电场力共同提供. 同时, 综合式(18)、(21)和(24)三式, 不难得出环形轨道上感应电场和环形轨道内感应电场对电子的作用力相等.

参考文献

- 1 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学. 北京: 高等教育出版社, 2006: 182 ~ 185
- 2 窦志国, 张茂才, 周进. 涡旋电场中导体上的电势. 工科大学物理, 1998(6): 19 ~ 22
- 3 丁世荣. 用类比法求解涡旋电场. 西安地质学院学报, 1995(3): 72 ~ 76
- 4 雷甫. 关于涡旋电场的教学探讨. 成都大学学报(自然科学版), 1998(1): 58 ~ 62
- 5 崔艳, 刘树森. 关于涡旋电场的几点讨论. 西北纺织工学院学报, 2000(1): 106 ~ 108
- 6 汪镁. 用磁场元的叠加法求解涡旋电场. 重庆建筑工程学院学报, 1991(3): 24 ~ 29
- 7 江遛汉. 用类比法研究涡旋电场. 大学物理实验, 1998(2): 5 ~ 7
- 8 桑芝芳. 导体回路中感应电动势是如何分布的. 物理通报, 2010(2): 8 ~ 11

Issue Analysis and Case Analysis on Vortex Electric Field Excited by Changing Magnetic Field in Circular Region

Huang Shaohua Wang Jinxia

(Liu Panshui No. 23 Middle School, Liu Panshui, Guizhou 553000)

Abstract: In the paper, the analysis of distribution of the eddy electric field and the electric potential under the nonconductor constraints and conductor constraints in the eddy electric field. Distribution law about the eddy electric field, the induced electromotive force and the electric potential with the uniform changes in the magnetic field within the limited circular area is given, and the calculation and comparison of electric potential under the condition of non-conductor constraints and conductor constraints with the uniform changes in the magnetic field within the limited circular area. By introducing the concepts of power supply, electric potential and voltage in the vortex electric field, which clarifies some concepts involved the vortex electric field that are vague to understand in physics teaching in college. In this paper, a specific case of the vortex electric field is analyzed in detail.

Key words: induced electromotive force; eddy electric field; nonconductor constraint; conductor constraint; case analysis