

固体均匀弦振动中数据处理与误差分析

张春 杨宁选

(石河子大学理学院物理系 新疆 石河子 832000)

(收稿日期:2017-06-03)

摘要:弦振动实验是普通物理学力学中一个基本实验,是大学物理实验中研究驻波现象的经典例子.本文首先应用分析天平测量了弦线的质量,计算了弦线的线密度及其不确定度;然后利用最小二乘法对弦线上的张力 $\ln T$ 与行波波长 $\ln \lambda$ 的实验数据进行处理,并用 Origin 进行线性拟合;最后还使用两种不同方法计算了行波的波速,并对比了波速的误差度.

关键词:弦振动 驻波 最小二乘法 误差分析

固体均匀弦振动实验是大学普通物理力学中的一个基础、传统教学实验,它验证了弦线上横波的传播规律,观察固定均匀弦振动传播时形成的驻波波形,测量均匀弦线上横波的传播速度及均匀弦线的线密度^[1~11].通常采用实验方法有两种:一是采用振动频率固定的电动音叉,通过改变弦线长度或张力,形成稳定驻波,研究横波的叠加现象,验证横波的波长与张力、线密度的关系;二是采用频率连续可调的振动体,改变弦长或张力,形成稳定驻波从而验证弦线上驻波的振动规律^[5].方法一实验操作简便,实验现象非常明显,但该方法在测量波长时,受实验条件的影响,测量弦长的数据不是很精确^[5],为此本文将探讨在数据处理中可以应用最小二乘法,研究弦线上横波的波长与张力的关系,并利用 Origin 软件进行线性拟合,对波速和频率及其误差进行计算,为实验操作者和实验教学者提供参考.

1 实验装置及理论分析

弦振动实验仪^[1]如图1所示,将弦线一端固定于电振音叉的一个脚上,另一端绕过定滑轮后挂一砝码,弦线张力 T 的大小即是砝码的重力.闭合开关 S 后,调节音叉断续器的接触点螺丝 S' ,令音叉维持振幅恒定的简谐振动,可迫使弦线产生横波向外传播,并在端点 D 发生反射.由于前进波与反射波的

振幅相同,频率相同,振动方向相同且传播方向相反,则当 C 与 D 两端间弦线的长度满足一定的条件时,前进波与反射波在弦线上可产生干涉.

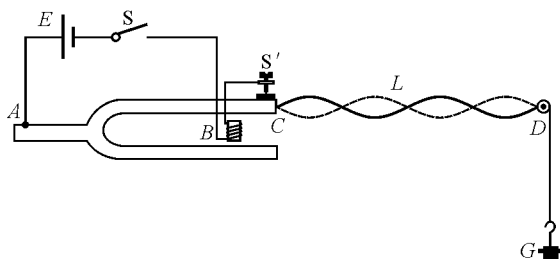


图1 弦振动实验装置图

设从 C 到 D 为 x 轴正方向,弦线上每一点与 x 轴垂直振动,而且在振动的每一时刻弦线位于 x 轴的一个平面. u 表示弦离开平衡位置的位移,则 u 为弦上点的横坐标和时间 t 的函数.此外,由于弦线实际上是在阻尼介质(空气)中振动,若考虑阻力,则阻力可看成与横向速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 成正比,假如弦的单位长度所受的阻力 $F = -R \frac{\partial u}{\partial t}$,其中 R 为阻力系数,于是,当弦线的张力为 T ,密度为 ρ ,则弦在阻尼介质中的振动方程为

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - R \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

此式中,忽略弦的重力.令 $a^2 = \frac{T}{\rho}$, $k = \frac{R}{\rho}$,则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

弦振动实验一端为振源,另一端固定,属于有界弦的强迫振动,初始时刻,式(1)满足的初始条件为

$$u|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

如果振源以正弦函数方式振动,式(1)满足的边界条件为

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = \sin(2\pi\nu t) \quad (4)$$

式中 l 为弦长, ν 为振源的振动频率. 因为弦的振动在时间上是简谐的,所以对方程(1)分离变量后,求出的通解为

$$u(x, t) = (Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x})e^{i2\pi\nu t} \quad (5)$$

式中 A 与 B 是两个积分常数,等号右侧第一项表示自波源向固定端传播的入射波,第二项则是由固定端反射回来向波源传播的反射波, A 是分离时所引入的常数.

2 实验原理

驻波是波的干涉现象的特例,产生驻波的条件为:振幅相同且在同一直线上沿相反方向传播的两列相干波. 设前进波沿 x 轴正方向传播,则反射波沿 x 轴负方向传播,取它们振动相位始终相同的点为坐标原点,且在 $x=0$ 处振动质点向上达到最大位移时开始计时,则前进波的波动表达式为

$$y_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

反射波的表达式为

$$y_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\cos\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

其中, A 为简谐波的振幅, ω 为圆频率, f 为频率, λ 为波长, x 为弦线上质点的坐标位置. 两列波叠加后形成驻波,其表达式为

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t =$$

$$2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos 2\pi ft \quad (6)$$

式(6)表示驻波上各点都在做简谐振动,各点振动的频率相同,即是波的频率,但是各点的振幅随质点坐标位置的不同而不同,即各点的振幅为

$$A_x = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \quad (7)$$

其中,振幅为零的点称为波节,振幅最大的点称为波腹. 驻波不是振动状态的传播,也没有能量的传播,而是介质中各质点都做稳定的简谐振动.

由于波节处振幅为零,即

$$\left| 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \right| = 0$$

可得波节的位置为

$$x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

同理,可得波腹的位置为

$$x = \pm k\frac{\lambda}{4} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

则相邻两波节(或波腹)的距离为

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2} \quad (8)$$

因此,在实验中,当 C 与 D 两端间弦线的长度等于半波长的整数倍时,可观察到驻波现象,此时只要测得相邻两波节或相邻两波腹的距离,就可以确定波长

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (9)$$

其中, n 称为半波数. 由波动理论可证,沿着一条拉紧的弦线传播横波时,波的传播速度 v 满足

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (10)$$

其中, T 为弦线的张力, ρ 为弦线的线密度(即单位长度的质量).

若弦线的波动频率为 f ,弦线上传播的横波波长为 λ ,则根据 $v = f\lambda$ 及式(10)得

$$\lambda = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (11)$$

对式(11)两边取对数,得

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (12)$$

式(12)为弦振动的传播规律.

3 实验内容及数据记录

(1) 首先用分析天平称出不同长度弦线的质量,然后用米尺测出其长度,记录在表1中.

表1 弦线的线密度

测量值 \ 次数	1	2	3	4	5	6
弦线物理量						
弦线的质量 $m / \times 10^{-3} \text{ kg}$	0.246 8	0.285 3	0.333 2	0.352 0	0.375 1	0.418 5
弦线的长度 $l / \text{ m}$	0.642 1	0.753 2	0.876 5	0.921 2	0.987 5	1.102 5
线密度 $\rho / (\times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{ m}^{-1})$	0.384 4	0.378 8	0.380 1	0.382 1	0.379 8	0.379 6
$\bar{\rho} / (\times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{ m}^{-1})$	0.380 8					

(2) 取砝码质量依次为 20 g, 40 g, 60 g, 80 g, 100 g, 120 g, 140 g, 160 g, 调节弦线的长度, 使弦线上出现稳定的驻波, 记录半波数的个数和用米尺测量出弦线的长度(测量 5 次), 记录在表 2 中, 在本实验中取力学实验室位置重力加速度的理论值^[2] 为 $g_{\text{理论}} = 9.808 \text{ m/s}^2$.

4 数据处理及结果分析

(1) 对于弦线的线密度, 多次测量求平均值

$$\bar{\rho} = 0.380 8 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$$

其中

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = 8.481 4 \times 10^{-7}$$

分析天平 $\Delta_{\text{仪}} = 0.000 1 \times 10^{-3} \text{ kg}$

米尺 $\Delta_{\text{仪}} = 0.000 1 \text{ m}$

总不确定度为

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 8.481 9 \times 10^{-7}$$

因此

$$\bar{\rho} = (0.380 8 \pm 0.000 8) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$$

表2 悬挂不同质量砝码时弦线的长度和半波数

砝码质量 / g	弦线长度 / m					半波数 $n /$ 个
	1	2	3	4	5	
20	0.678 1	0.678 5	0.677 9	0.678 3	0.679 2	6
40	0.939 6	0.940 1	0.939 7	0.939 9	0.939 7	6
60	0.964 1	0.964 4	0.964 1	0.964 3	0.964 1	5
80	1.107 0	1.107 5	1.107 1	1.107 4	1.107 5	5
100	1.008 2	1.008 7	1.008 6	1.008 4	1.008 6	4
120	1.085 5	1.085 1	1.085 4	1.085 1	1.084 9	4
140	0.892 7	0.892 3	0.892 4	0.892 5	0.892 1	3
160	0.947 5	0.946 9	0.947 2	0.947 1	0.946 8	3

表3 $\ln \lambda \sim \ln T$ 的关系

砝码质量 / g	弦线张力 / N	弦线平均长度 / m	半波个数 $n /$ 个	波长 / m	$\ln \lambda \sim y$	$\ln T \sim x$
20	0.196 2	0.678 4	6	0.226 1	-1.486 6	-1.628 8
40	0.392 3	0.939 8	6	0.313 3	-1.160 7	-0.935 7
60	0.588 5	0.964 2	5	0.385 7	-0.952 7	-0.530 2
80	0.784 6	1.107 3	5	0.442 9	-0.814 4	-0.242 5
100	0.980 8	1.008 5	4	0.504 3	-0.684 7	-0.019 4
120	1.177 0	1.085 2	4	0.542 6	-0.611 4	0.162 9
140	1.373 1	0.892 4	3	0.594 9	-0.519 3	0.317 1
160	1.569 3	0.947 1	3	0.631 4	-0.459 8	0.450 6

(2) 对于式(11), 两边取对数, 有

$$\ln \lambda = \frac{1}{2} \ln T + \ln \left(\frac{1}{f\sqrt{\rho}} \right)$$

设

$$y = \ln \lambda \quad x = \ln T$$

$$a = \frac{1}{2} \quad b = \ln \left(\frac{1}{f\sqrt{\rho}} \right)$$

则 $y=ax+b$; 可以验证 $\ln\lambda \sim \ln T$ 的线性关系. 代入相应的测量数据后, 用最小二乘法计算 a, b 的值及相关系数 R 和灵敏度的值 k . 由于

$$b = \ln\left(\frac{1}{f\sqrt{\rho}}\right)$$

得

$$\rho = \frac{1}{f^2 e^{2b}}$$

取 f 等于电振音叉的固有频率 f_0 计算出 ρ 与 $\bar{\rho}$ 比较.

根据最小二乘法处理数据的方法, 有

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - \frac{a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (13)$$

$$R = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$k = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i \cdot \frac{1}{n} \sum y_i - \frac{1}{n} \sum x_i y_i}{\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right)^2 - \frac{1}{n} \sum x_i^2} \quad (14)$$

可以计算出 $a=0.4976, b=-0.6853$; 关联系数 $R=0.9702$, 灵敏度的值 $k=0.4976$. 从结果上看, 关联系数接近于 1, 说明 $\ln\lambda, \ln T$ 具有较好的线性关系.

用 OriginPro7.5 软件可以进行线性拟合, 拟合的图像如图 1 所示. 从图 1 可以看出实际曲线和拟合曲线一致性非常好, $\ln\lambda$ 和 $\ln T$ 满足线性关系.

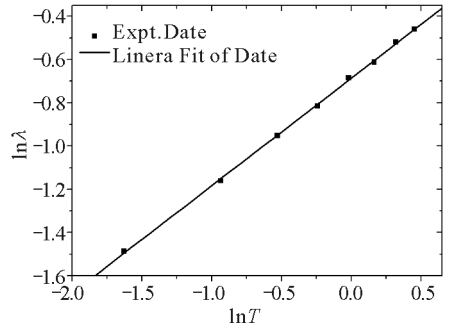


图 1 $\ln\lambda \sim \ln T$ 拟合关系曲线图

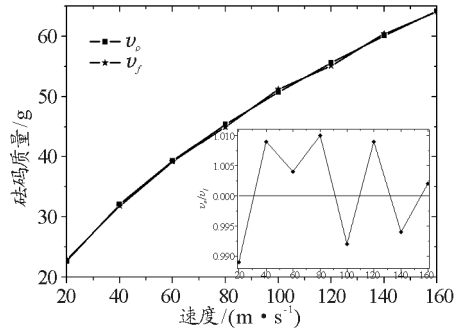


图 2 $m \sim \nu_\rho, \nu_f$ 关系曲线图

如果取电振音叉的固有频率 $f=f_0=101.5$ Hz, $b=-0.6852$, 根据 $\rho = \frac{1}{f^2 e^{2b}}$ 可以计算出, $\rho = 0.3821 \times 10^{-3}$ kg/m 与 $\bar{\rho} = (0.3808 \pm 0.0008) \times 10^{-3}$ kg/m 比较可以看出, 相对误差为 3.4%. 又由式(9)、式(10)和 $v=f\lambda$ 得, $\nu_\rho = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 和 $\nu_f = \frac{2L}{n}f$, 同样可以取电振音叉的固有频率 $f=f_0=101.5$ Hz, $\bar{\rho} = (0.3808 \pm 0.0008) \times 10^{-3}$ kg/m, 比较两种方法计算波速的误差, 如表 4 所示. 从表 4 和图 2 可以看出, 两种方法计算出的波速一致性非常好, 波速的误差大部分都在 1% 以内.

表 4 两种波速及误差的计算

砝码质量 / g	弦线张力 / N	弦线平均长度 / m	半波个数 / 个	波长 / m	$\nu_\rho = \sqrt{\frac{T}{\rho}} / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\nu_f = \frac{2L}{n}f / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\frac{\nu_\rho}{\nu_f}$
20	0.196 2	0.678 4	6	0.226 1	22.696 4	22.952 5	0.989
40	0.392 3	0.939 8	6	0.313 3	32.097 5	31.796 6	1.009
60	0.588 5	0.964 2	5	0.385 7	39.311 3	39.146 5	1.004
80	0.784 6	1.107 3	5	0.442 9	45.392 8	44.956 4	1.010
100	0.980 8	1.008 5	4	0.504 3	50.750 7	51.181 4	0.992
120	1.177 0	1.085 2	4	0.542 6	55.594 6	55.073 9	1.009
140	1.373 1	0.892 4	3	0.594 9	60.049 0	60.385 7	0.994
160	1.569 3	0.947 1	3	0.631 4	64.195 1	64.087 1	1.002

5 小结

本文从波动方程入手,推导出弦振动时产生驻波的方程;得出弦振动形成驻波时,波长、弦中张力、频率和弦线密度之间的关系.对弦振动的实验数据采用最小二乘法处理,并用 OriginPro7.5 软件对 $\ln\lambda \sim \ln T$ 进行了线性拟合,分析了相对误差.此外,本文用分析天平求弦线线密度时,计算了其不确定度,并采用两种方法计算了弦线上行波的波速,对比了两种波速的误差度.

参考文献

- 1 张建军,殷保详.大学物理实验.北京:北京邮电大学出版社,2013
- 2 张松峰,张鸿辉,周小东.基于最小二乘法的弦振动的研究.智能计算机与应用,2015,5(6):49~51
- 3 王荣,牛英煜.利用弦振动方程研究驻波特性.物理实验,2012,32(7):36~39

- 4 浦天舒.弦振动实验中阻力系数的测定.物理与工程,2015,25(3):54~56
- 5 吕春,杨萍,张兵.从弦振动实验方法的多样性,探究物理实验教学方法.第六届全国高等学校物理实验教学研讨会论文集(上),148~151
- 6 王玉清.固定均匀弦振动仪装置的拓展应用.实验室研究与探索,2009,28(3):31~33
- 7 黄莘,王茂香.弦振动实验数据处理与分析.大学物理实验,2013,26(6):89~91
- 8 张宇亭,赵斌,王茂香.弦振动实验中驻波波长的测量方法.实验科学与技术,2016,14(1):42~45
- 9 张庆龙.弦振动特性研究.大学物理实验,2016,29(4):65~66
- 10 苗锬,黄育红,李康,等.弦振动形成驻波的规律和数据的 MATLAB 处理.大学物理实验,2010,23(4):75~79
- 11 姚久民,田广志,祝玉华.用频谱分析法研究弦振动实验.物理实验,2009,29(12):30~33

Data Processing and Error Analysis in Homogeneous Chord Vibration of Solid

Zhang Chun Yang Ningxuan

(Department of Physics, College of Science, Shihezi University, Shihezi, Xinjiang 832003)

Abstract: String vibration is a basic experiment and in general physics mechanics, String vibration research is also the classical example of a standing wave in university physics experiment. In this paper, the mass of the String is measured by the analytical balance, and the linear density of String and its uncertainty are calculated. Then, the experimental data are dealt with by the least square method and realizes linear fitting with the origin method. Finally, using two methods to calculate the wave velocity, the error degree of wave velocity is compared.

Key words: vibration of string; standing wave; least squares method; error analysis

(上接第 62 页)

$$|E_{H-}| = |E_{G-}| = E_{QG} = k \frac{Q}{a^2}$$

所以, +Q 放在 G 时, H 点场强大小为

$$E_H = E_{QH} + E_{H-} = k \frac{Q}{a^2} - k \frac{Q}{(2a)^2} = k \frac{3Q}{4a^2}$$

方向沿 y 负向. 所以, 选项 B 正确.

3 结语

利用对称思维分析对称性物理问题, 关键是能否敏锐地看出和抓住对称问题的某一方面的对称特点. 很多对称模型极具隐蔽性, 需要结合一定的基础

知识甚至是跨学科知识才能有效地建立起来.

学生解决物理问题的能力是其思维模式的体现, 从某种程度上讲也是教师教学模式和方法的体现.

参考文献

- 1 2014 年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)理科综合能力测试卷
- 2 2015 年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)理科综合能力测试卷
- 3 2013 年普通高等学校招生全国统一考试(全国 I 卷)理科综合能力测试卷