大学物理教学

同心球壳电容器与同轴圆筒电容器的对应性

郑　金

(凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500)

(收稿日期:2017-06-12)

摘　要:推导了同心球壳电容器和同轴圆筒电容器的电容公式以及能够承受最大电压时内外半径的数量关系,探究了两种电容器的等效正对面积的对应性以及耐压最大时内外半径关系式的对应性.

关键词:电容器　对应性　半衰期　时间常数　几何平均数

对于球形电容器和圆柱形电容器,由于带电球面或带电圆筒在其内部空间产生的场强为零,则内极板包围的区域没有电场;由于两极表面的等量异种电荷都等效于集中在球心或轴线上而相互中和,则外极板之外的区域没有电场.所以只在两极板之间存在电场,或者说,电容器内部电场相当于只由里面的电极产生,与外面的电极无关.而且两种电容器的电容公式和优化设计半径的尺寸都具有对应性.

1　电容器的尺寸设计

【例 1】[1] 两个同心导体球壳,外球壳的内半径 $R=5$ cm,内球壳的外半径可以任意选择,若两球壳之间充满各向同性均匀电介质,能使该电介质恰好不被击穿的电场强度为 2×10^7 V/m,试求两球壳之间能承受的最大电压.

解析:设内球壳的外半径为 r,内、外球壳的电荷量分别为 Q,$-Q$,相对介电常数为 ε_r,以圆心为坐标原点,则两球壳之间的场强与坐标 x 的关系式为

$$E_x=\frac{kQ}{x^2\varepsilon_r}(r\leqslant x\leqslant R)$$

可知两球壳之间的电势差为

$$U=\frac{kQ}{r\varepsilon_r}-\frac{kQ}{R\varepsilon_r}=E_x x^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

由场强的关系式可知,当 $x=r$ 时,E_x 取最大值,而 E_x 的允许最大值为 E_m,则

$$U=E_m r^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)=\frac{E_m}{R}(-r^2+Rr)$$

由一元二次函数 $y=-r^2+Rr$ 可知,当 $r=\frac{R}{2}=0.5R$ 时,电压取最大值为

$$U_m=\frac{E_m R}{4}=2.5\times10^5\ \text{V}$$

【例 2】[2] 由绝缘介质隔开的两个同轴的柱形导体构成了同轴柱形电容器.设内、外导体与介质接触面的半径分别为 r 和 R,长度为 $l(l\gg R-r)$,两圆筒之间充满相对介电常数为 ε_r 的电介质,其击穿场强为 E_{max}.在外半径 R 一定的情况下,为使电容器能够

续表 4

方法内容	具体案例检索
运用对称思维(巧选参考系)结合功能关系简化热量求解过程	例 3 中,通过选择传送带参考系,运用 $fx_r=Q$ 关系,简化热量求解过程
运用能量守恒解题思路.(1) 分析变化能量;(2) 明确增加和减小能量,写出变化表达式 $\Delta E_增$,$\Delta E_减$;(3) 列出能量守恒表达式 $\Delta E_增=\Delta E_减$	例 10 中,大气内能、物体和活塞重力势能减少,气体内能、物体动能增加.列出 $p_0Sx+2mgx=n\frac{3}{2}R(T_2-T_0)+\frac{1}{2}2mv_m^2-\frac{1}{2}2mv_1^2$

(4) 形成高中能量物理观念,培养科学推理核心素养

学生通过探究解答,整合构建,总结提炼等深度学习,深刻理解高中能量内涵,领悟功能关系和能量转化的一般性、哲理性含义,把握高中物理能量知识体系和解答能量问题的方法体系,切实有效地形成高水平能量观念物理核心素养,有效培养科学推理核心素养.

承受的电压最大,求内圆柱导体的半径 r 应为多大.

解析:真空中均匀带电无限长直线在距离为 x 处的场强大小为

$$E=\frac{2k\lambda}{x}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

设圆筒电容器内、外两极分别带等量正、负电荷,那么只有在两圆筒之间的区域存在电场,这相当于只由里面的圆筒产生电场,而均匀带电无限长圆筒在圆筒外面产生的电场可等效为电荷集中于圆筒轴线上的均匀带电的无限长直线产生的电场,可知介质中离轴线 x 处的场强为

$$E_x=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 x}(r\leqslant x\leqslant R) \tag{1}$$

电容器内、外圆筒之间的电势差为

$$U=\int_r^R E_x\,\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}=E_x x\ln\frac{R}{r} \tag{2}$$

由式(1)可知,当 $x=r$ 时,场强最大,而电介质其击穿场强为 $E_{\max}$,代入式(2)得

$$U=E_{\max}r\ln\frac{R}{r} \tag{3}$$

令 $U=E_{\max}x\ln\dfrac{R}{x}$,为了求极值,可求出导函数.

利用公式 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ 可知

$$\left(\ln\frac{R}{x}\right)'=(\ln R-\ln x)'=-\frac{1}{x}$$

则

$$U'=E_{\max}\left[\ln\frac{R}{x}+x\left(\ln\frac{R}{x}\right)'\right]=E_{\max}\left(\ln\frac{R}{x}-1\right)$$

令 $U'=0$,可得 $E_{\max}\left(\ln\dfrac{R}{x}-1\right)=0$,即 $\ln\dfrac{R}{x}=1$,因此 $\dfrac{R}{x}=\mathrm{e}$. 可知 $x=\dfrac{R}{\mathrm{e}}=0.368R$.

所以当内圆柱导体的半径 $r=0.368R$ 时,可使设计出的电容器能够承受的电压最大.

由此联想到原子核衰变规律[3],可有两个表达式,分别为 $N=N_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ 和 $N=N_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=N_0\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{t}{\tau}}$.

当 $t=T$ 时,剩余量为 $N=N_0\cdot 2^{-1}=0.5N_0$,因此半衰期 T 表示衰变后剩余原来的一半所用的时间,即每经过一个半衰期 T,衰变了一半,剩余一半;当 $t=\tau$ 时,剩余量为 $N=N_0\mathrm{e}^{-1}\approx 0.368N_0$,因此时间常数 τ 表示衰变后剩余原来的 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\approx 0.368$ 所用的时间,即每经过一个 τ 的时间,剩余 37%.

在数学上,指数函数 $y=y_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ 与 $y=y_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ 是等价的,只是形式不同,但在本质上是统一的. 而对于两种优化电容器,$r=\dfrac{R}{2}=0.5R$ 与 $r=\dfrac{R}{\mathrm{e}}=0.368R$ 分别含有 2 与 $\mathrm{e}=2.718$. 这是巧合还是必然? 耐人寻味.

2　电容器的电容公式

【**例 3**】试推导同心球壳电容器的电容公式.

解析:两球壳之间的电势差为

$$U=\frac{kQ}{r\varepsilon_r}-\frac{kQ}{R\varepsilon_r}$$

可知电容的倒数为

$$\frac{1}{C}=\frac{U}{Q}=\frac{k}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

所以电容为

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 Rr}{R-r}=\frac{4\pi\varepsilon Rr}{R-r}=\frac{\varepsilon S}{d}$$

由此可知球壳电容器两极等效正对面积等于两个球壳表面积的几何平均数.

【**例 4**】试推导同轴圆筒电容器的电容公式.

解析:同心圆筒电容器两极的电势差为

$$U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}(\ln R-\ln r)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}(\ln R-\ln r)$$

所以电容为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln R-\ln r}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r\pi l}{\ln\left(1+\dfrac{d}{r}\right)}$$

当同心圆筒的间距 d 比半径 r 小得多时,$x=\dfrac{d}{r}\ll 1$,利用公式 $\ln(1+x)\approx x$ 可得

$$C\approx\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r\pi rl}{R-r}=\frac{\varepsilon S}{d}$$

正对面积 $S=2\pi rl$ 等于里面圆筒的表面积. 由于 $R\approx r$,则 $S\approx 2\pi l\sqrt{Rr}$,可知两极等效正对面积等于两个表面积 $S_1=2\pi lr$ 与 $S_2=2\pi lR$ 的几何平均数. 可见,两种电容器的电容公式中的等效正对面积都等于两极面积的几何平均数 $S=\sqrt{S_1S_2}$. 而且电容公式都相似于平行板电容器的电容公式.

参 考 文 献

1　谢鑫,高永宝. 静电场中的导体和电介质[J]. 数理天地(高中版),2009(6):44 ~ 45

2　蒋丽艳,顾燕红. Excel 用于优化设计电容器尺寸[J]. 物理通报,2005(6):37 ~ 39

3　郑金. 原子核衰变规律的两个表达式是一致的[J]. 物理教师,2011(4):39