探究求解带电粒子在磁场中运动问题的方法

陈俊昆　成金德

（义乌市第二中学　浙江 义乌　322000）

（收稿日期：2017－06－16）

摘　要：带电粒子在磁场中的运动问题是一类运用洛伦兹力公式、圆周运动知识和数学知识的综合问题.由于综合性强，能力要求高，学生在学习过程中，往往很难突破，是一类让学生望而生畏的物理问题.为了有效解答此类问题，作了些分析和探讨.

关键词：匀强磁场　匀速圆周运动　临界　有界磁场　轨迹圆　圆心

带电粒子在磁场中运动的问题既与物理学中的洛伦兹力、圆周运动、牛顿运动定律的知识相结合，还与数学中的平面几何、三角函数的知识相联系，是一类综合性强、能力要求高的物理问题.这类问题能很好地考查学生掌握知识的水平和综合运用知识的能力，正因如此，这类问题往往成为高考的热点问题，同时也成为学生学习中难度较大的问题.笔者认为，要有效地解答带电粒子在磁场中运动的问题，必须做好“过五关，斩六题”.

1　过五关

1.1　知识关

带电粒子在磁场中运动的问题所涉及的物理知识主要是洛伦兹力的特点和匀速圆周运动的特征.

（1）洛伦兹力.带电粒子在匀强磁场中运动时，洛伦兹力的大小 $f=qvB\sin\theta$，其中 θ 是运动方向与磁场方向间的夹角，当 $\theta=90°$ 时，洛伦兹力的大小 $f=qvB$.

（2）洛伦兹力的方向.洛伦兹力的方向总与运动方向和磁场方向垂直，三者方向满足左手定则.

（3）带电粒子垂直于磁场方向射入匀强磁场时，若带电粒子只受洛伦兹力作用，则带电粒子将做匀速圆周运动.根据牛顿第二定律可得

$$qvB=m\frac{v^2}{R}$$

则带电粒子运动的半径为

$$R=\frac{mv}{qB}$$

带电粒子运动的周期为

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi m}{qB}$$

1.2　数学关

求解带电粒子在磁场中的运动问题，在确定半径时，数学知识起决定性作用.其中常用的数学知识有如下 3 个方面.

（1）三角函数.主要是三角函数的定义式、和差化积、半角和倍角公式等.利用三角函数知识的目的是求解圆周运动的半径.

（2）平面几何.在求解带电粒子在磁场中运动的问题时，平面几何中的三角形知识和圆的知识有着广泛的应用.运用数学知识是构建带电粒子运动的物理学模型的关键.

（3）圆心角 α 与弦切角的关系.利用圆心角 α 与弦切角的关系，可求出带电粒子在磁场中的运动时间.运动时间 t 和转过的圆心角 α 之间的关系为

$$t=\frac{\alpha}{360°}T$$

或

$$t=\frac{\alpha}{2\pi}T$$

1.3　圆心关

确定带电粒子在磁场中做圆周运动的圆心是解题的关键环节.一般说来，确定圆心有如下几种常见方法：

（1）已知两点及速度方向.在两点上分别作速度方向的垂线，两垂线的交点即为圆轨迹的圆心，如图 1 所示.

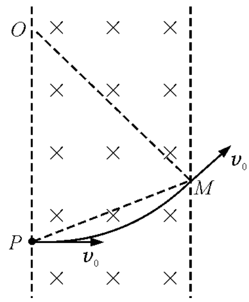

图 1　已知两点及速度方向确定圆心

(2) 已知两点及某点的速度方向. 在已知速度方向的点作速度方向的垂线,同时画出两点连线的中垂线,两垂线的交点即为圆轨迹的圆心,如图 2 所示.

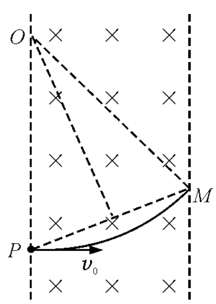

图 2　已知两点及某点的速度方向,确定圆心

(3) 已知某点的速度方向及半径 R. 在该点作速度方向的垂线,垂线上距该点 R 处的点即为圆轨迹的圆心(利用左手定则判断圆心在已知位置的哪一侧),如图 3 所示.

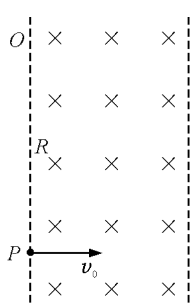

图 3　已知某点的速度方向及半径,确定圆心

(4) 已知 3 点. 若已知带电粒子经过磁场中的 3 点 A,B,C,则可先做 AB 的中垂线,再做 BC 的中垂线,两条线相交点,即为圆心 O.

(5) 已知入射方向和出射方向及半径. 延长粒子两速度方向所在的直线,作两直线的角平分线,在角平分线上找到与两直线距离为 R 的点,该点即为圆心,如图 4 所示.

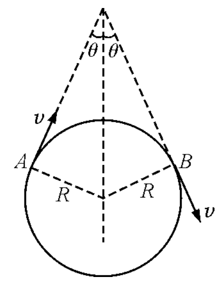

图 4　已知入射方向和出射方向及半径,确定圆心

1.4　**规律关**

带电粒子进入磁场做圆周运动时,应用数学知识得到的一些规律,应该熟记并适时应用,有时可使问题大大简化.

规律 1:如果带电粒子沿着具有直线边界的磁场进入,则它的运动具有对称性,如图 5 所示.

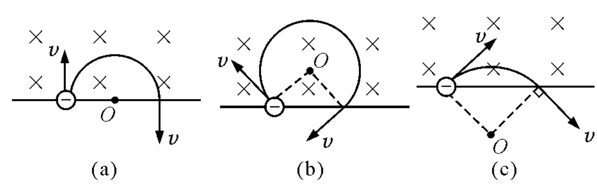

图 5　带电粒子沿具有直线边界的磁场进入

规律 2:射向圆形匀强磁场中心的带电粒子,都好像是从匀强磁场中心射出来,如图 6 所示.

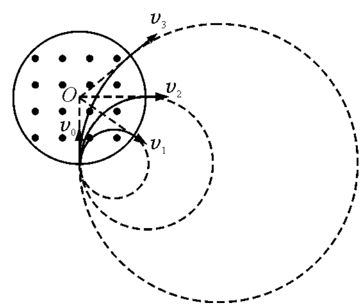

图 6　带电粒子射向圆形匀强磁场中心

规律 3:若带电粒子在磁场中的运动轨迹半径等于圆形磁场半径,则沿任意方向射入的带电粒子,出射时的速度方向必与过入射点 O 的圆形磁场的切线平行,如图 7 所示.

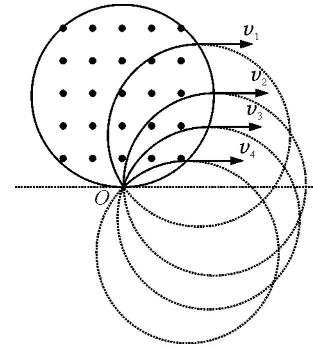

图 7　带电粒子轨道半径等于圆形磁场半径

1.5　方法关

(1) 基本方法. 求解和分析带电粒子在磁场中的运动问题,基本的方法包含以下 3 个方面.

1) 画轨迹. 根据题给条件,画出带电粒子在磁场中运动的轨迹圆,并确定圆心位置,这是解题的关键步骤.

2) 求半径. 由轨迹圆和几何约束条件,根据数学知识计算半径;或者根据物理方法,也就是应用公式 $R=\dfrac{mv}{qB}$ 确定半径.

3) 用规律. 应用牛顿第二定律和圆周运动的规律,再结合周期公式和半径公式,列方程求解.

(2) 辅助方法. 分析带电粒子在磁场中运动的问题时,常常运用一些辅助方法,以帮助建立物理模型,寻找解题的突破口. 其中以下 2 种方法最为实用.

1) 舒张手指圆法(放大圆法)

如图 8 所示,一束带负电的粒子垂直射入匀强磁场,若初速度方向相同,大小不同,所有粒子运动轨迹的圆心都在垂直于初速度方向的直线上,轨道半径随速度增大而增大,通过舒张手指圆法可以方便地找出与右边界相切的临界轨迹.

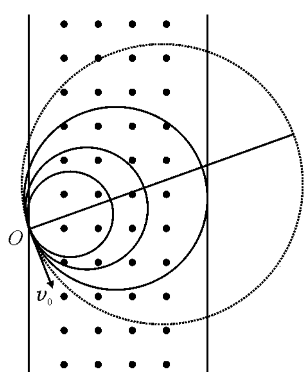

图 8　舒张手指圆法情境图

舒张手指圆法是指由两只手的大拇指和食指构成一个圆,如图 9 所示,调整手指重叠部分的多少,可以获得半径不同的圆,从而有效确定临界圆. 这种方法既方便,又随时可用.

图 9　舒张手指圆法展示图

2) 滚动手指圆法(旋转圆法)

若带电粒子进入磁场时,速度大小不变,方向改变,则由 $r=\dfrac{mv}{qB}$ 可知,半径 r 大小不变,但带电粒子运动的轨迹圆的圆心位置发生变化,相当于圆心在绕着入射点滚动,如图 10 所示. 此种情况也可用手指圆滚动法确定,即手指圆半径不变,但手指圆绕带电粒子的入射点转动. 这里可得到两个重要结论:其一,轨迹圆的圆心构成一个半径与轨迹圆相同的圆;其二,轨迹圆的包络线构成一个半径等于轨道圆直径的圆.

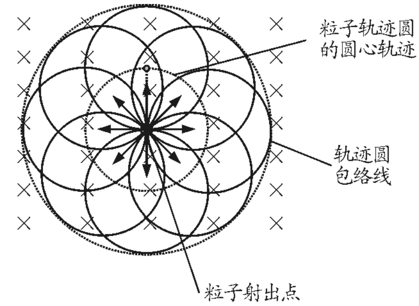

图 10　滚动手指圆法情境图

2　斩六题

要掌握求解带电粒子在磁场中运动问题的方法,就必须深刻理解和正确把握以下 6 种题型的解题技巧和方法.

题型 1:极值问题

带电粒子在磁场中运动的问题,常出现诸如求最大速度、最短时间、最长距离等极值问题. 求解时需弄清产生极值的条件,再应用相应的物理知识和数学知识. 速度的极值根据临界圆的半径判断,半径越大速度越大. 时间的极值根据临界轨迹的圆心角判断,圆心角越大时间越长.

【例 1】 如图 11 所示,某空间存在着两个匀强磁场,其分界线是半径为 R 的圆,两侧的磁场方向相反且垂直于纸面,磁感应强度大小都为 B. 现有一质量为 m,电荷量为 q 的带正电离子(不计重力) 从 A 点沿 OA 方向射出. 求:

(1) 离子在磁场中做匀速圆周运动的周期;

(2) 若向外的磁场范围足够大,离子自 A 点射出后在两个磁场不断地飞进飞出,最后又能返回到 A 点,求其返回到 A 点的最短时间及对应离子的速度;

(3) 若向外的磁场是有界的,分布在以 O 点为圆心、半径为 R 和 $2R$ 的两圆之间的区域,上述离子仍从 A 点沿 OA 方向射出,且离子仍能返回 A 点,求其返回 A 点的最短时间.(可能用到的三角函数值:$\sin 37°=0.6$,$\cos 37°=0.8$)

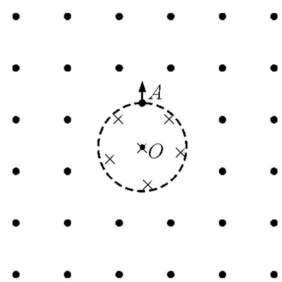

图 11　例 1 题图

分析:(1) 由于离子在磁场中做匀速圆周运动,根据牛顿第二定律得

$$qvB=m\frac{v^2}{r}$$

由周期公式知

$$T=\frac{2\pi r}{v}$$

解以上两式可求出离子在磁场中做匀速圆周运动的周期为

$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

(2) 画出离子在磁场中运动的轨迹图,由于轨迹有多种可能,这里仅画出两种情况,如图 12 和图 13 所示.

显然,离子从 A 点射出后,按如图 12 所示的运动,即离子只有一次进出向里的磁场返回 A 时所用的时间最短.

由对称性和几何关系可得,最短时间为

$$t_{\min}=t_1+t_2+t_3=\frac{300°}{360°}T+\frac{60°}{360°}T+\frac{300°}{360°}T=\frac{11}{6}T$$

将 $T=\dfrac{2\pi m}{qB}$ 代入得

$$t_{\min}=\frac{11\pi m}{3qB}$$

由几何关系可知离子做圆周运动的半径为

$$r=\sqrt{3}R$$

由牛顿第二定律得

$$qv_1B=\frac{mv_1^2}{r}$$

解以上各式得

$$v_1=\frac{\sqrt{3}qBR}{m}$$

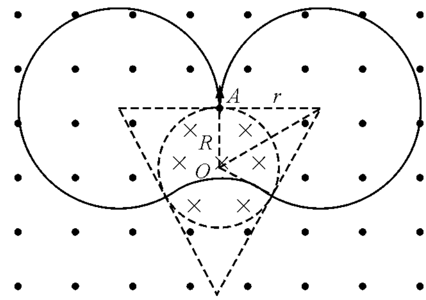

图 12　离子在磁场中运动的轨迹图 1

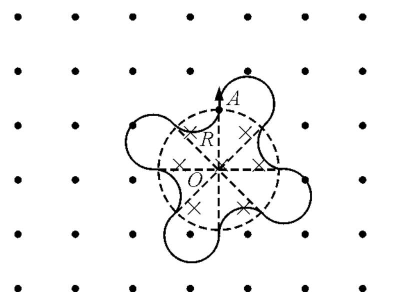

图 13　离子在磁场中运动的轨迹图 2

(3) 离子从 A 点射出后,要使离子回到 A 处的时间最短,则离子射入外磁场时所做的圆周运动的半径必须最大,由此作出如图 14 所示的轨迹图.由几何关系可知离子运动轨迹不超出边界的条件为

$$\sqrt{r^2+R^2}+r\leqslant 2R$$

解得

$$r\leqslant\frac{3}{4}R$$

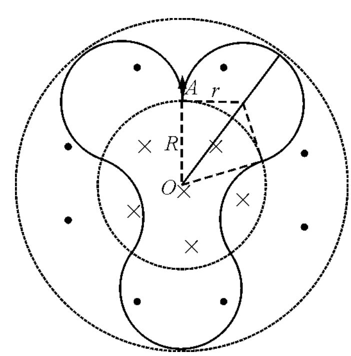

图 14　离子从 A 点射出后的轨迹图

由对称性和几何关系得

$$\frac{r}{R}=\tan\frac{\pi}{n}$$

即

$$\tan\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{3}{4}$$

解得

$$n \geqslant 4.86$$

由于 n 必须取整数，因此，当 $n=5$ 时，离子从 A 点出发到返回 A 的时间最短.

由离子轨迹得

$$t'_{\min}=2T+\frac{7}{10}T=\frac{27}{10}T$$

将 $T=\dfrac{2\pi m}{qB}$ 代入上式得

$$t'_{\min}=\frac{27\pi m}{5qB}$$

题型 2：有界磁场问题

带电粒子进入有边界的磁场时，由于边界条件的不同，将会产生临界问题和多解问题. 此类问题综合性较强，难度较大. 解答这类问题既要熟练应用洛伦兹力、圆周运动的知识，又要正确选用平面几何和三角函数知识，还要特别注意弄清边界条件和临界条件.

【**例** 2】如图 15 所示，现有一质量为 m，电荷量为 e 的电子从 y 轴上的 $P(0,a)$ 点以初速度 v_0 平行于 x 轴射出，为了使电子能够经过 x 轴上的 $Q(b,0)$ 点，可在 y 轴右侧加一垂直于 xOy 平面向里、宽度为 L 的匀强磁场，磁感应强度大小为 B，该磁场左、右边界与 y 轴平行，上、下范围足够大(图中未画出). 已知 $\dfrac{mv_0}{eB}<a<\dfrac{2mv_0}{eB}$，$L<b$. 试求磁场的左边界距坐标原点的可能距离.(结果可用反三角函数表示)

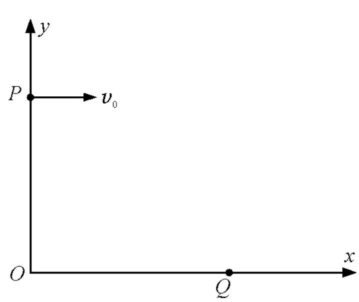

图 15　例 2 题图

分析：电子在磁场中做匀速圆周运动，根据牛顿第二定律得

$$eBv_0=m\frac{v_0^2}{r}$$

求得半径

$$r=\frac{mv_0}{eB}$$

当 $r>L$ 时，根据电子受力情况和磁场的边界条件，画出电子运动的轨迹图，如图 16 所示.

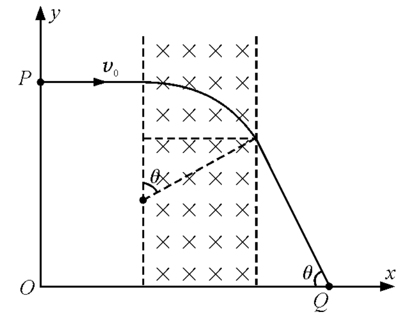

图 16　$r>L$ 时电子的轨迹图

由几何关系知

$$\sin\theta=\frac{L}{r}$$

则磁场左边界距坐标原点的距离为

$$x_1=b-L-[a-r(1-\cos\theta)]\cot\theta$$

解得

$$x_1=b-L-\left[a-\frac{mv_0}{eB}(1-\cos\theta)\right]\cot\theta$$

其中 $\theta=\arcsin\dfrac{eBL}{mv_0}$.

当 $r<L$ 时，根据电子受力情况和磁场的边界条件，画出电子运动的轨迹图，如图 17 所示. 由几何关系和边界条件得磁场左边界距坐标原点的距离为

$$x_2=b-\sqrt{r^2-(a-r)^2}$$

解得

$$x_2=b-\sqrt{\frac{2mv_0a}{eB}-a^2}$$

所以，磁场的左边界距坐标原点的可能距离为

$$x_1=b-L-\left[a-\frac{mv_0}{eB}(1-\cos\theta)\right]\cot\theta$$

或
$$x_2=b-\sqrt{\frac{2mv_0a}{eB}-a^2}$$

其中 $\theta=\arcsin\dfrac{eBL}{mv_0}$.

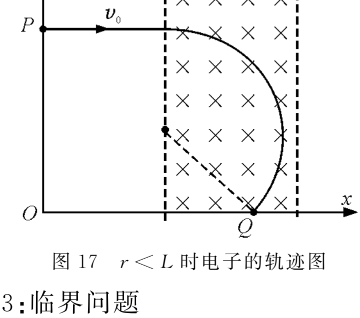

图 17　$r<L$ 时电子的轨迹图

题型 3：临界问题

带电粒子在磁场中做匀速圆周运动时，由于磁

场边界的存在及速度大小和方向、磁感应强度的大小和方向的不确定性，往往引起粒子运动的临界问题. 解决临界问题的关键是画出“临界轨迹”，注意利用带电粒子刚好穿出磁场边界的条件，即带电粒子在磁场中运动的轨迹圆与边界必相切.

【例 3】 如图 18 所示，正方形 $abcd$ 区域内有垂直于纸面向里的匀强磁场，O 点是 cd 边的中点. 一个带正电的粒子(重力忽略不计) 若从 O 点沿纸面以垂直于 cd 边的速度射入正方形内，经过时间 t_0 刚好从 c 点射出磁场. 现设法使该带电粒子从 O 点沿纸面以与 Od 成 30° 的方向(如图中虚线所示)，以各种不同的速率射入正方形内，那么下列说法中正确的是(　　)

A. 该带电粒子不可能刚好从正方形的某个顶点射出磁场

B. 若该带电粒子从 ab 边射出磁场，它在磁场中经历的时间可能是 t_0

C. 若该带电粒子从 bc 边射出磁场，它在磁场中经历的时间可能是 $\frac{3}{2}t_0$

D. 若该带电粒子从 cd 边射出磁场，它在磁场中经历的时间一定是 $\frac{5}{3}t_0$

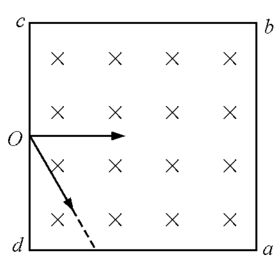

图 18　例 3 题图

分析：带正电的粒子从 O 点沿纸面以垂直于 cd 边的速度射入正方形内，并刚好从 c 点射出磁场时，带电粒子的运动轨迹正好是半个圆，即它的运动周期 $T=2t_0$.

当带电粒子从 O 点沿纸面以与 Od 成 30° 角的方向，以各种不同的速率射入正方形内，带电粒子将在磁场中做半径不同的圆周运动.

应用舒张手指圆法，可画出几个具有临界条件的轨迹圆(图中只画出轨迹圆在磁场中的部分)，即如图 19 中的 ②③④ 图线. 显然，带电粒子不可能刚好从正方形的某个顶点射出磁场，选项 A 正确.

结合几何关系，先求出带电粒子分别过 B，D，F 3 点的时间为

$$t_B=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times 2t_0=\frac{t_0}{3}$$

$$t_D=\frac{150^\circ}{360^\circ}\times 2t_0=\frac{5t_0}{6}$$

$$t_F=\frac{240^\circ}{360^\circ}\times 2t_0=\frac{4t_0}{3}$$

若该带电粒子从 ab 边射出磁场，从图中看出，它在磁场中经历的时间介于 $\frac{t_0}{3}\sim\frac{5t_0}{6}$ 间，可见，选项 B 错误；若该带电粒子从 bc 边射出磁场，它在磁场中经历的时间介于 $\frac{5t_0}{6}\sim\frac{4t_0}{3}$ 间，所以，选项 C 错误.

从 cd 边射出的粒子，在磁场中运动的轨迹圆弧所对应的圆心角都相等，都等于 300°，在磁场中运动的时间均为

$$t_{cd}=\frac{300^\circ}{360^\circ}\times 2t_0=\frac{5t_0}{3}$$

所以，选项 D 正确.

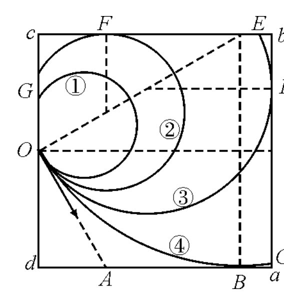

图 19　应用舒张手指圆法画例 3 轨迹图

题型 4：多解问题

带电粒子在磁场中做圆周运动时，由于带电粒子的电性、速度方向和磁场方向的不确定性，由于临界状态不唯一和带电粒子运动的周期性等因素，造成多解情况. 求解时必须认真分析产生多解的原因，弄清出现多解的各种因素，以便准确无误地求出各种结果.

【例 4】 如图 20 所示，一个质量为 m，电荷量为 q 的正离子，从 A 点正对着圆心 O 以速度 v 射入半径为 R 的绝缘圆筒中. 圆筒内存在垂直纸面向里的匀强磁场，磁感应强度的大小为 B. 要使该正离子与圆筒内壁碰撞多次后仍从 A 点射出，求正离子在磁场中运动的时间 t. 设离子与圆筒内壁碰撞时无能量和电荷量损失，不计离子的重力.

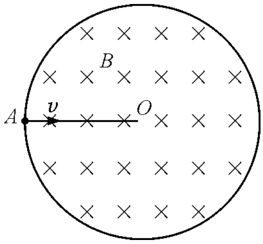

图 20　例 4 题图

分析：由于离子与圆筒内壁碰撞时无能量损失和电荷量损失，根据离子在有界磁场中的运动特点可知，每次碰撞后离子的速度方向都沿半径方向指向圆心，并且离子运动的轨迹是对称的，这样可画出离子与圆筒内壁碰撞的各种情形，如图 21 所示是碰撞 2 次的情形，如图 22 所示是碰撞 3 次的情形，依次可画出碰撞多次的情形（这里未画出）.

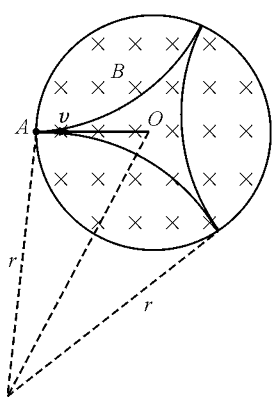

图 21　碰撞两次的轨迹

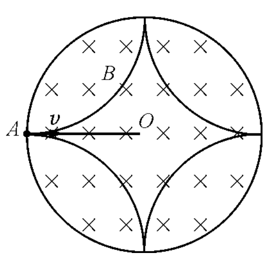

图 22　碰撞 3 次的轨迹

由于离子进入磁场的速度不同，将导致多解. 设离子与圆筒内壁碰撞 n 次（$n \geqslant 2$），由几何关系可知每相邻两次碰撞点之间圆弧所对的圆心角为 $\frac{2\pi}{n+1}$，则离子运动的半径为

$$r = R\tan\frac{\pi}{n+1}$$

离子运动的周期为

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

根据牛顿第二定律得

$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

所以离子在磁场中运动的时间为

$$t = \frac{2\pi R}{v}\tan\frac{\pi}{n+1}\ (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

题型 5：变化磁场问题

带电粒子在变化磁场（最为典型的是交变磁场）中运动时，由于运动情况不仅与磁场的变化规律有关，还与粒子进入磁场的时间有关，所以，这是一类集复杂性和综合性于一身的难题. 解题时一定要从粒子的受力分析入手，弄清带电粒子在不同时间间隔内的运动情况，抓住运动特征（往往具有周期性和对称性），熟练巧妙地运用相关规律.

【例 5】 如图 23(a) 所示的平面坐标系 xOy，在整个区域内充满了匀强磁场，磁场方向垂直坐标平面，磁感应强度 B 随时间变化的关系如图 23(b) 所示，开始时刻，磁场方向垂直纸面向内（如图）. $t = 0$ 时刻，有一带正电的粒子（不计重力）从坐标原点 O 沿 x 轴正向进入磁场，初速度 $v_0 = 2\times10^3$ m/s. 已知正粒子的比荷 $\frac{q}{m} = 1.0\times10^4$ C/kg，其他有关数据见图中标示. 试求：

(1) $t = \frac{4\pi}{3}\times10^{-4}$ s 时刻，粒子的坐标；

(2) 粒子从开始时刻起经多长时间到达 y 轴；

(3) 粒子是否还可以返回原点，如果可以，则经多长时间返回原点.

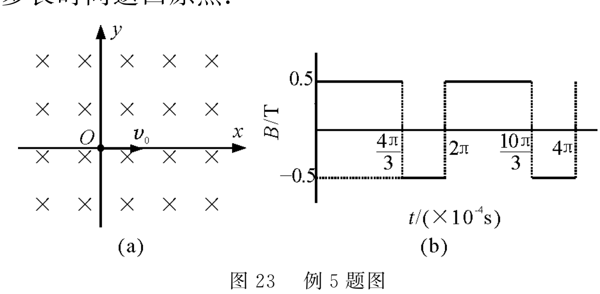

图 23　例 5 题图

分析：(1) 带电粒子在磁场中做匀速圆周运动，由洛伦兹力提供向心力有

$$qv_0B = m\frac{v_0^2}{R}$$

则半径为

$$R = \frac{mv_0}{qB} = \frac{2\times10^3}{1.0\times10^{-4}\times0.5}\ \text{m} = 0.4\ \text{m}$$

根据周期公式得

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB} = 4\pi\times10^{-4}\ \text{s}$$

在 $t=\frac{4\pi}{3}\times10^{-4}$ s 时间内，带电粒子运动的周期数

$$n_1=\frac{\frac{4\pi}{3}\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-4}}=\frac{1}{3}$$

即 $\frac{1}{3}$ 个运动周期，则运动轨迹相对应的圆心角为 120°，由此作出粒子在磁场中运动的轨迹图，如图 24 所示.

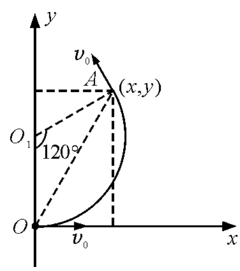

图 24　$\frac{1}{3}$ 个运动周期内粒子在磁场中运动的轨迹图

第一段时间末，粒子的坐标为

$$x=R\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{5}\ \text{m}$$

$$y=R+O_1A\sin 30^\circ=0.6\ \text{m}$$

所以，粒子的坐标 $\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\ \text{m},0.6\ \text{m}\right)$.

(2) 根据第(1) 问可知，粒子在第 1 个磁场变化的时间段内时，运动了 $n_1=\frac{1}{3}$ 个周期，在第 2 个时间段内运动的周期数

$$n_2=\frac{\frac{2\pi}{3}\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-4}}=\frac{1}{6}$$

即 $\frac{1}{6}$ 个周期，所对应的运动轨迹圆心角为 60°，第 3 个时间段内带电粒子运动的周期数

$$n_3=\frac{\frac{4\pi}{3}\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-4}}=\frac{1}{3}$$

即 $\frac{1}{3}$ 个运动周期，则运动轨迹相对应的圆心角为 120°. 粒子运动轨迹如图 25 所示，粒子恰好在第 3 段时间末通过 y 轴.

故运动时间为

$$t=t_1+t_2+t_3=\frac{1}{3}T+\frac{1}{6}T+\frac{1}{3}T=\frac{5}{6}T=$$

$$\frac{5}{6}\times4\pi\times10^{-4}\ \text{s}=\frac{10\pi}{3}\times10^{-4}\ \text{s}$$

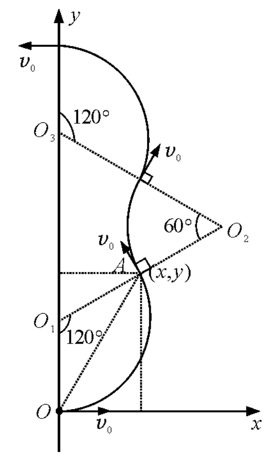

图 25　3 个时间段内的运动轨迹

(3) 根据磁场的变化情况，画出带电粒子在磁场中的运动轨迹，如图 26 所示. 显然，带电粒子在磁场中做周期性运动，根据对称性和周期性可知，其中圆心 O_2，O_6，O_{10} 构成一个正三边形. 带电粒子在磁场中一共运动了 6 个大圆弧和 6 个小圆弧，故从原点出发至回到原点的总时间为

$$t_{总}=6t_1+6t_2=6\times\frac{4\pi}{3}\times10^{-4}\ \text{s}+$$

$$6\times\frac{2\pi}{3}\times10^{-4}\ \text{s}=12\pi\times10^{-4}\ \text{s}$$

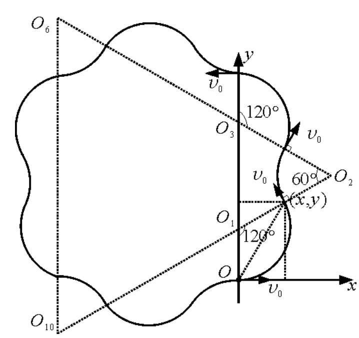

图 26　粒子在磁场中的运动轨迹

题型 6：组合磁场问题

求解带电粒子在组合磁场中的运动问题时，不仅要弄清带电粒子在各个磁场中的运动情况，还要注意应用组合磁场连接处的边界条件，最后注意准确应用有关规律建立方程.

【例 6】为了使带正电粒子经过一系列的运动后，又以原来的速率沿相反方向回到原位，可设计如下的一个磁场区域，如图 27 所示，区域 Ⅰ(梯形 $PQCD$) 内有垂直纸面向里的匀强磁场，磁感应强度为 B；区域 Ⅱ(三角形 APD) 内的磁场方向与 Ⅰ 内相同，但是大小可以不同，区域 Ⅲ(虚线 PD 之上、三

角形 APD 以外）的磁场与 Ⅱ 内大小相等、方向相反.已知等边三角形 AQC 的边长为 $2l$，P 和 D 分别为 AQ 和 AC 的中点.带正电的粒子从 O 点以某一速度 v_0 射入区域 Ⅰ，再从 P 点垂直 AQ 射入区域 Ⅲ，又经历一系列运动后返回 O 点.（粒子重力忽略不计）求：

（1）该粒子的比荷；

（2）粒子从 O 点出发再回到 O 点的整个运动过程所需时间.

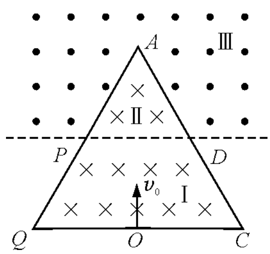

图 27　例 6 题图

分析：(1) 带电粒子在磁场中做匀速圆周运动，根据牛顿第二定律得

$$qv_0B=m\frac{v_0^2}{R}$$

由几何关系得 $R=l$，代入上式解得

$$\frac{q}{m}=\frac{v_0}{Bl}$$

(2) 带电粒子在磁场中运动的总时间包括在区域 Ⅰ 中的时间 t_1，区域 Ⅱ 中的时间 t_2 和区域 Ⅲ 中的时间 t_3．由几何关系可知，带电粒子在区域 Ⅰ 中的时间为 2 个 $\frac{T}{6}$，即

$$t_1=2\times\frac{2\pi l}{6v_0}=\frac{2\pi l}{3v_0}$$

若带电粒子在区域 Ⅱ 和 Ⅲ 内的运动情形如图 28 所示，则总路程为 $\left(2n+\frac{5}{6}\right)$ 个圆周，由边界的几何关系得 $AP=4nr+r=l$.

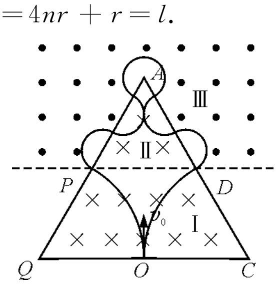

图 28　粒子在区域 Ⅱ 和 Ⅲ 内的运动情形 1

解得　　$r=\frac{l}{4n+1}$

其中 $n=0,1,2,\cdots$

带电粒子在区域 Ⅱ 和 Ⅲ 内通过的总路程为

$$s=\left(2n+\frac{5}{6}\right)\times 2\pi r$$

则带电粒子在区域 Ⅱ 和 Ⅲ 内运动的时间为

$$t_2+t_3=\frac{s}{v_0}=\frac{\left(2n+\frac{5}{6}\right)\times 2\pi l}{(4n+1)v_0}$$

所以，带电粒子在磁场中运动的总时间为

$$t_{总}=t_1+t_2+t_3=\frac{(20n+7)\pi l}{3(4n+1)v_0}$$

若带电粒子在区域 Ⅱ 和 Ⅲ 内的运动情形如图 29 所示，则总路程为 $\left(2n+1+\frac{1}{6}\right)$ 个圆周，由边界的几何关系得

$$AP=4nr+3r=l$$

解得

$$r=\frac{l}{4n+3}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$

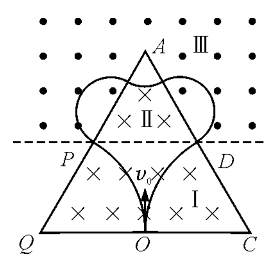

图 29　粒子在区域 Ⅱ 和 Ⅲ 内的运动情形 2

带电粒子在区域 Ⅱ 和 Ⅲ 内通过的总路程为

$$s=\left(2n+1+\frac{1}{6}\right)\times 2\pi r$$

则带电粒子在区域 Ⅱ 和 Ⅲ 内运动的时间为

$$t_2+t_3=\frac{s}{v_0}=\frac{\left(2n+\frac{7}{6}\right)\times 2\pi l}{(4n+3)v_0}$$

所以，带电粒子在磁场中运动的总时间为

$$t_{总}=t_1+t_2+t_3=\frac{(20n+13)\pi l}{3(4n+3)v_0}$$

总之，求解带电粒子在磁场中的运动问题时，要善于突破知识上的 5 关，掌握 6 种题型的解法.要在善于分析带电粒子的运动轨迹，熟练应用数学知识确定圆周运动的半径，把握带电粒子运动的各个细节上下功夫，从而突破解题的思维障碍.

参考文献

1　成金德.带电粒子在电磁场中运动的问题求解策略.物理报，2002－12－24