

# 匀强磁场中任意刚性导线的动生电动势

陈余华

(江西省大余中学 江西 赣州 341500)

黄亦斌

(江西师范大学物理与通信电子学院 江西 南昌 330022)

(收稿日期:2017-07-01)

**摘要:**匀强磁场中导体做切割磁感线运动而产生的动生电动势公式  $E = BLv$  只适用于特定情形. 如何将其推广是一个热点话题. 本文以导线微元动生电动势的一般公式和刚体运动特征为起点, 将动生电动势公式推广到直导线的任意运动以及任意形状的刚性导线的任意运动情形, 得到了 3 条结论, 并对它们进行了证明.

**关键词:**匀强磁场 刚性导线 动生电动势 闭合回路

磁场中导体运动导致的动生电动势是电磁感应的一个重要内容. 而动生电动势的计算也是高考和竞赛的重要考点, 也是大家讨论的一个热点<sup>[1]</sup>. 文献[2]研究了较为一般的情况, 即刚性直导线在垂

直于匀强磁场的平面内绕任一固定点旋转. 其结论是, 无论固定点在哪里, 导线中的电动势都由其中点速度决定, 并给出公式和相关证明.

本文欲将其结论推广到更一般的情形, 包括直

图 7 所示, 从图中包络线可以形象地看出  $x=0$  位置是中央暗条的中心位置,  $x=0.003 \text{ m}$  位置是第一亮

条的中心位置.

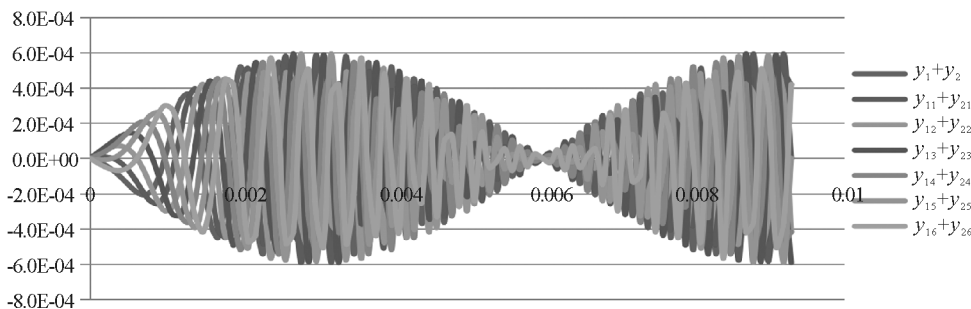


图 7 相差为  $\pi$  的多时间波形叠加图

还可以验证实验装置的参数对干涉的影响, 如  $d$  和  $L$  的改变, 只要改变相应的单元格数据即可, 这里不一一验证了, 有兴趣的朋友可以去做做.

回想起初看到  $t_1$  时刻的波形图时对图形的怀疑, 原因是因为驻波的波形干扰了我们, 以为杨氏双缝干涉的波形图也该是规规矩矩的标准图, 虽然有理论合成的方程式, 但没有看到过实际合成的波形图, 这种 Excel 数形结合的方法应用到物理中来收到了较好的效果, 使得本来不易研究的物理问题变

得简单、形象、直观, 让我们看到了物理现象最本质的东西.

## 参考文献

- 1 吴迪青. 用 Excel 仿真模拟中学物理规律. 物理教师, 2017(3):63 ~ 65
- 2 吴迪青. Excel 仿真模拟及卫星轨道计算. 物理教学, 2017(3):59 ~ 60
- 3 陈森, 郭敏勇, 张师平, 等. 杨氏双缝干涉一种简便的波函数解释. 大学物理实验, 2014(6):38 ~ 39

导线的任意运动以及任意形状的刚性导线的任意运动,并对结果给出更为严格和简短的证明.

## 1 出发点

讨论的出发点是一段导线微元  $d\mathbf{l}$  在磁场中运动时产生的电动势

$$dE = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

该式不仅给出了电动势  $dE$  的大小,也给出了其符号,而且以沿  $d\mathbf{l}$  方向为正. 根据矢量混合积的性质,该电动势等于 3 个矢量  $\mathbf{v}, \mathbf{B}, d\mathbf{l}$  所构成的平行六面体的体积(可相差一个负号),如图 1 所示. 如果  $\mathbf{v}, \mathbf{B}, d\mathbf{l}$  构成右手系,则  $dE > 0$ ; 若三者构成左手系,则  $dE < 0$ . 当然,如果  $\mathbf{v}, \mathbf{B}, d\mathbf{l}$  中有任何两个方向相同(或相反),则  $dE = 0$ . 所有这些都与动生电动势的通常判断结果(包括大小和方向)相同.

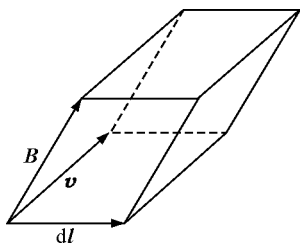


图 1 混合积  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$

还需对刚体的运动做一陈述. 在刚体上取一点  $D$ , 称为基点, 则刚体的任一运动状态可视为随基点的平动和绕基点的转动的合成. 平动由  $\mathbf{v}_D$  表征, 转动由角速度  $\boldsymbol{\omega}$  表征. 这里的角速度矢量沿转轴, 且由右手螺旋法则确定: 伸出右手, 让四指绕向与旋转方向一致, 则大拇指的指向就是角速度的方向. 这样, 刚体上任一点  $P$  的速度为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{r}$  为点  $P$  相对于点  $D$  的位置矢量. 基点可以任取, 从而  $\mathbf{v}_D$  和  $\mathbf{r}$  随之变化; 但无论取哪一点为基点, 刚体的角速度  $\boldsymbol{\omega}$  是确定的.

## 2 直导线做任意运动时产生的电动势

**结论一:** 刚性直导线在匀强磁场中做一般运动时产生的电动势, 等于它以中点速度做平动而产生的电动势

$$E = \mathbf{B} \times \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_C = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}_C \quad (3)$$

如果导线限制在某平面内运动(比如垂直于磁场的平面, 即文献[2]所考虑的情形), 那么此时可以用图 2 来对结论一进行说明. 导线从位置  $AB$  运动到  $A'B'$  时扫过的面积, 与导线仅做平动而运动到  $A''B''$  时所扫过的面积, 二者显然相等. 故两种运动所切割的磁通量相同, 电动势相同.

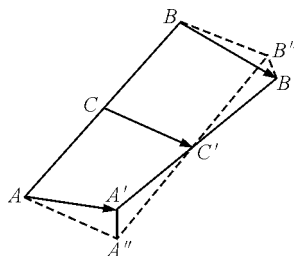


图 2 做平面运动的直导线

对于更一般的情形, 可对结论一做如下说明: 在中点两边对称地取两段微元, 它们的速度都是中点速度加上相对于中点的速度. 它们的后一相对速度一定相反, 对总电动势的贡献相反, 从而只剩下各自的中点速度导致的贡献. 由于相对运动的效应成对抵消, 故而最终只剩下共同的、中点速度导致的效应.

结论一的严格证明如下.

以中点  $C$  为原点, 导线上任一点的位置矢量为  $x\mathbf{e}$  ( $-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$ ,  $\mathbf{e}$  为沿  $AB$  方向的单位矢量). 对于直导线的任一运动, 设其中点速度为  $\mathbf{v}_C$ , 角速度为  $\boldsymbol{\omega}$ , 则根据式(2), 点  $x\mathbf{e}$  的速度为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times x\mathbf{e} \quad (4)$$

将其代入式(1), 考虑到微元为  $d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}$ , 积分, 并注意  $\mathbf{v}_C, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}, \mathbf{B}$  在积分时都是常矢量, 得

$$\begin{aligned} E &= \int_A^B dE = \int_A^B (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times x\mathbf{e}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \\ &= \int_A^B \mathbf{v}_C \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B (\boldsymbol{\omega} \times x\mathbf{e}) \times \mathbf{B} \cdot dx\mathbf{e} = \\ &= \mathbf{v}_C \times \mathbf{B} \cdot \left( \int_A^B d\mathbf{l} \right) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{e} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x dx = \\ &= \mathbf{v}_C \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} + 0 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}_C \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{l} = \overrightarrow{AB}$ . 证毕.

以图 3 中的导线  $AB$  为例. 图示为一个导体线圈

ABODA 固定在一个圆锥的表面,在匀强磁场中绕轴线转动,且此时  $OB$  刚好与磁场方向相同.相关参数和坐标系已标出.对于  $AB$  段的电动势,根据结论一,虽然  $AB$  在转动,但完全可以不顾及该转动,仅认为  $AB$  段以中点速度(方向垂直纸面向内、大小为  $v_C = \frac{\omega L \sin \theta}{2}$ ) 做平动.根据计算式(3),由于  $L = \overrightarrow{AB}$  与磁场  $\mathbf{B}$  的夹角为  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ,而  $\mathbf{v}_C$  与二者都垂直,故  $AB$  段的电动势为

$$E_{AB} = BLv_C \cos \theta = \omega BS \quad (5)$$

其中  $S = \frac{L^2 \sin^2 \theta}{4}$  为三角形  $ABO$  的面积.可以看出,式(5)也等于图中过中点  $C$  且平行于转轴的导线  $A'B'$  绕轴转动时产生的电动势.

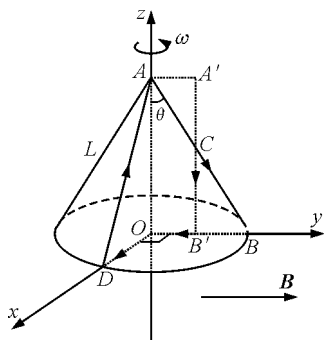


图3 处于匀强磁场中的导线

### 3 一般闭合回路中的电动势

**结论二:**对于匀强磁场中任意形状的刚性线圈,其做任意运动时的总电动势为

$$E = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{B} \times \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6)$$

其中  $\mathbf{S}$  为其面积矢量.

这里先对面积矢量作些说明.

(1) 面积矢量仅对回路才有定义.不闭合的导线没有“面积矢量”一说.

(2) 对于平面回路,其面积矢量的大小就是回路面积的大小,其方向沿回路平面的法向,且由右手螺旋法则确定:四指绕向与回路的绕向(电流或电动势的正方向)相同,则大拇指的方向即为  $\mathbf{S}$  的方向.

(3) 如果是由空间曲线构成的回路,则可将其

视为许多小的平面回路构成,每个平面回路可以确定其面积矢量;它们的矢量和就是整个回路的面积矢量.对于图3中的回路  $ABODA$ ,将其视为回路  $ABOA$  与  $AODA$  之和,二者的面积矢量分别是  $-S\mathbf{e}_x$  和  $-S\mathbf{e}_y$ ,则整个回路的面积矢量为  $-S(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$ ,其大小为  $\sqrt{2}S$ .

(4)  $N$  匝线圈的面积矢量是单匝线圈的面积矢量的  $N$  倍.如果匝与匝之间距离较大,或者线圈的绕行相当任意,那么可用下面的一般公式定义其面积矢量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \quad (7)$$

其中的微元  $\frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{r}}{2}$  正是环路微元  $d\mathbf{r}$  与原点构成的回路(图4中的  $ABOA$ ) 的面积矢量.

(5) 回路的面积矢量显然跟原点的位置无关,而式(7)正满足这一条,虽然表面上它似乎跟原点的位置有关.这是因为,原点换成  $O'$  时,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_O$  (图4).由于  $\mathbf{r}_O$  为常矢量,故

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{S}' &= \frac{1}{2} \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{r} + \mathbf{r}_O) \times d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}_O \times \oint d\mathbf{r} = \mathbf{S} \end{aligned}$$

其中用到了  $\oint d\mathbf{r} = 0$ .

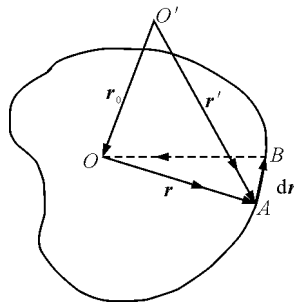


图4 面积矢量

对于常见的矩形线圈旋转产生电动势的问题中,当线圈平面与  $\mathbf{B}$  平行时,线圈的电动势最大,且最大值为  $BS\omega$ .用式(6)来解释,那是因为此时  $\mathbf{B}, \mathbf{S}$  与  $\boldsymbol{\omega}$  两两垂直.仔细分析还表明,式(6)也正确反映

了电动势的方向(注意电动势的正方向就是回路的绕向). 而图3中的回路  $ABODA$  的电动势依式(6)计算为

$$E = B e_y \times [-S(e_x + e_y)] \cdot \omega e_z = BS\omega \quad (8)$$

当然,式(8)也可以通过分析回路每段的电动势而得到.

可以根据式(6)来判断线圈的电动势何时为零. 这包括以下情形:

- (1)  $\omega = 0$ , 即线圈只做平动, 无转动;
- (2)  $\omega, \mathbf{B}$  同向, 即线圈的转轴沿磁场方向;
- (3)  $\omega, \mathbf{S}$  同向. 对于平面线圈而言, 这意味着线圈的转轴垂直于线圈平面;

(4)  $\mathbf{S}, \mathbf{B}$  同向. 对于平面线圈而言, 这意味着磁场垂直于线圈平面. 由于线圈旋转通常导致面积矢量的旋转  $\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \omega \times \mathbf{S}\right)$ , 故而  $\mathbf{S}, \mathbf{B}$  同向通常只在某时刻成立, 此时电动势瞬时为零.

结论二的证明如下.

任取线圈刚体的基点  $D$ , 把式(2)代入式(1), 积分, 得

$$E = \oint dE = \oint (\mathbf{v}_D + \omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v}_D \times \mathbf{B} \cdot \oint d\mathbf{r} + \oint d\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}$$

其中  $\mathbf{v}_D, \omega, \mathbf{B}$  为常矢量, 而

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) &= \omega(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) - (\omega \cdot d\mathbf{r})\mathbf{r} = \\ \omega d\left(\frac{1}{2}r^2\right) - \frac{1}{2}(\omega \cdot d\mathbf{r})\mathbf{r} - \frac{1}{2}\omega \cdot (d\mathbf{r})\mathbf{r} - \\ \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{r}d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{r}d\mathbf{r} &= \\ \omega d\left(\frac{1}{2}r^2\right) - \frac{1}{2}\omega \cdot d(\mathbf{r}\mathbf{r}) + \\ \frac{1}{2}(\omega \cdot \mathbf{r})d\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\omega \cdot d\mathbf{r})\mathbf{r} &= \\ \omega d\left(\frac{1}{2}r^2\right) - \frac{1}{2}\omega \cdot d(\mathbf{r}\mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \times \omega \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  为并矢(二阶张量). 由于

$$\oint d\mathbf{r} = 0 \quad \oint d\left(\frac{1}{2}r^2\right) = 0 \quad \oint d(\mathbf{r}\mathbf{r}) = 0$$

故

$$E = \frac{1}{2} \left( \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \right) \times \omega \cdot \mathbf{B} = \mathbf{S} \times \omega \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{S} \cdot \omega$$

其中, 用到了面积矢量的定义(7). 证毕.

#### 4 任意形状的导线中的电动势

**结论三:** 对于任意形状的刚性导线  $ALB$ , 其在匀强磁场中运动时产生的动生电动势由两部分构成: 直导线  $AB$  的电动势和回路  $ALBA$  的电动势, 即

$$E_{ALB} = E_{ALBA} + E_{AB} \quad (9)$$

该结论的证明非常简单, 几乎不需要文字说明, 仅图5足矣.

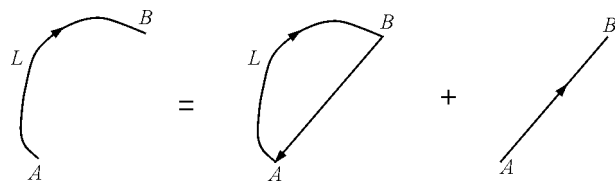


图5 一般刚性导线的电动势

于是, 根据结论一和结论二, 导线  $ALB$  的电动势为

$$E_{ALB} = \mathbf{B} \times \mathbf{S} \cdot \omega + \mathbf{B} \times \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_C \quad (10)$$

其中  $\mathbf{v}_C$  为直线段  $\mathbf{l} = \overrightarrow{AB}$  的中点的速度. 注意该定理是非常一般的, 仅有匀强磁场和刚性导线这两个要求; 导线的形状是任意的, 导线的运动也是任意的.

对于直导线, 式(9)和(10)的第一项为零; 对于闭合线圈, 它们第二项为零. 而对于图3中非闭合的空间导线  $BODA$ , 根据结论三, 其电动势应该为回路  $BODAB$  的电动势与直线  $BA$  的电动势之和. 前者由式(8)给出, 后者与式(5)相反, 故导线  $BODA$  电动势为零. (当然, 直接分段考虑也可得到该结论.)

#### 参考文献

- 1 杨培军, 王鹏. 数学平均值在物理上的应用. 物理通报, 2015(5): 22 ~ 25
- 2 徐洪图, 窦人镜. 导体棒转动切割磁感线问题探微. 物理通报, 2017(3): 52 ~ 53