

关于牵连体速度及加速度变化规律的分析

许 龙

(安徽省太和一中 安徽 阜阳 236600)

杨培军

(阜阳市教育局物理教研室 安徽 阜阳 236000)

(收稿日期:2017-07-09)

摘要:对一道牵连体的高考模拟题展开分析,并推导出两牵连体的速度和加速度表达式,并利用 Mathematica 模拟出二者随绳子摆角的变化规律.

关键词:牵连体 速度 加速度

在备战高考的复习中,常遇到绳牵连体问题,许多学生对此非常棘手;尤其是寻找牵连体速度极值位置时经常出现这样的错误:两者同时达到速度极值,速度极值位置在二者静止的位置.其实不然,利用牛顿第二定律、能量守恒和一定的数学知识推导后就会发现两牵连体速度并非同步变化.下面笔者就结合一道高考模拟题来分析牵连体速度极值的位置.

解决此类问题时要明确两点:牵连体沿着绳方向速度大小相等,能量守恒.

1 真题回放

【题目】(2017年南通高三第一次调研)如图1所示,足够长的光滑直杆倾斜固定,杆上套有质量为 m 的小滑块 A ,用足够长、不可伸长的轻绳将 A 与另一质量为 $2m$ 的小物块 B 绕过光滑的定滑轮相连接, A 位于 O 点,此时滑轮左侧轻绳恰好水平.现将 A 从 O 点由静止释放, B 在运动过程中不触碰滑轮和直杆,则()

- A. 滑块 A 释放瞬间,绳对 A 的拉力为 $2mg$
- B. 滑块 A 速度最大时,物块 B 的速度也最大
- C. 滑轮左侧的轻绳与直杆垂直时,滑块 A 速度最大
- D. 滑轮左侧的轻绳与直杆垂直时,滑块 A 机械能最大

解析:设初始时杆与水平面夹角为 α ,滑块 A 释

放瞬间绳子拉力为 T ,对 A, B 受力分析可得

$$\begin{cases} T \cos \alpha + mg \sin \alpha = ma_A \\ 2mg - T = 2ma_B \end{cases} \quad (1)$$

由几何关系得 $a_A \cos \alpha = a_B$,整合后有

$$T = \frac{1 - \cos \alpha \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha} \cdot 2mg < 2mg$$

故 A 选项错误.

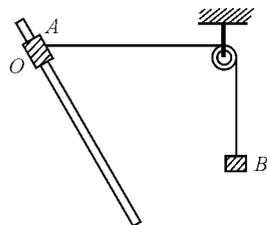


图1 题图

A 下滑至滑轮左侧的轻绳与直杆垂直的过程中, A 和 B 的高度皆降低,速度均增大;此后 A 继续下滑,假设 A 稍下滑一点,绳与杆垂直方向夹角为 β (β 极小),绳子拉力为 F ,对 A 和 B 受力分析得

$$\begin{cases} 2mg - F = 2ma_B \\ mg \sin \alpha - F \sin \beta = ma_A \end{cases} \quad (2)$$

由几何关系可得

$$a_A \sin \beta = -a_B$$

联立后有

$$a_A = g \frac{\sin \alpha - 2 \sin \beta}{1 + 2 \sin^2 \beta} > 0$$

故 A 的速度将继续增大, B 的速度将减小,由此可知

作者简介:许龙(1989-),男,中教二级,研究方向高中物理教学和竞赛辅导.

通讯作者:杨培军(1970-),男,中教高级,研究方向物理教学改革与教育理论.

选项 B,C 错误.

A 下滑至绳与杆垂直的过程中, 绳子拉力对 A 做正功, 机械能增加; 滑过与杆垂直位置后, 绳子拉力对 A 做负功, A 机械能减小, 故 D 选项正确.

答案解析并无错误, 但并未对两牵连体速度和加速度进行详细推导, 其变化规律到底如何并未作详细说明. 下面笔者就这种牵连体的一般模型进行分析计算, 寻找速度和加速度表达式, 并利用特殊值验证计算.

2 速度变化规律

设光滑杆与水平夹角为 α , 经过一段时间绳与水平夹角为 θ , 滑轮左侧绳长为 L , A 的速度 v_1 , 沿杆运动位移 x ; B 的速度为 v_2 , 亦为 A 沿绳子上的分速度, 此时二者速度关联 $v_2 = v_1 \cos(\alpha + \theta)$, 如图 2 所示. 由此可知, 当

$$\alpha + \theta < \frac{\pi}{2}$$

时, A 沿绳子方向分速度沿绳向上, B 向下运动, 当

$$\alpha + \theta > \frac{\pi}{2}$$

时, A 沿绳子方向分速度沿绳向下, B 向上运动; 所以当

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$$

时, A, B 重力做正功, B 速度为零, A 机械能最大.

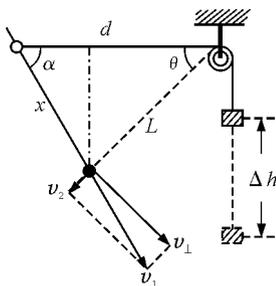


图 2 两物速度与位置图像

在滑块 A 运动的任意位置、初点、绳子与滑轮悬点围成的三角形, 内角分别为 $\alpha, \theta, \pi - (\alpha + \theta)$, 可由三角形正弦定理得

$$\frac{d}{\sin[\pi - (\alpha + \theta)]} = \frac{x}{\sin \theta} = \frac{L}{\sin \alpha} \quad (3)$$

可得 A 下滑位移 x 和 B 沿绳向下位移 Δh

$$x = \frac{d \sin \theta}{\sin(\alpha + \theta)} \quad (4)$$

$$\Delta h = d - L = d - \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)}$$

同时利用机械能守恒得到其速度大小

$$mgx \sin \alpha + 2mg \Delta h = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m v_2^2 \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)整合可得二者速度, 为了方便, 笔者用 v_1^2 和 v_2^2 来表示二者速度关系

$$v_1^2 = \frac{2dg [\sin \alpha \sin \theta + 2 \sin(\alpha + \theta) - 2 \sin \alpha]}{[1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)] \sin(\alpha + \theta)} \quad (6)$$

$$v_2^2 = 2dg \cos^2(\alpha + \theta) [\sin \alpha \sin \theta + 2 \sin(\alpha + \theta) - 2 \sin \alpha] \cdot$$

$$\{ [1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)] \sin(\alpha + \theta) \}^{-1} \quad (7)$$

由表达式已能看出二者速度并非同步变化. 可由 Mathematica 作出二者随绳摆角 θ 的变化图像, 能更形象地表示出二者变化规律.

当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $d = 1 \text{ m}$ 时, 可由 Mathematica 命令作出两者速度图像, 如图 3 所示.

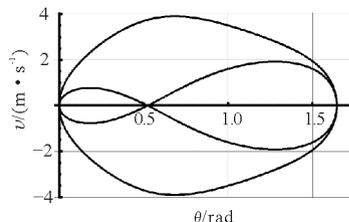


图 3 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时两物体速度随绳子摆角变化规律

由图像更能直观看二者速度变化规律: 速度变化并不同步, 物块 B 速度有两个极值, 而 A 只有一个. 对于速度极大值的位置可以利用求导的方法进行计算: 令速度为 θ 的函数, 并令其导函数为零, 求解的根即为速度最大值时对应的绳子摆角. 可用 Mathematica 的寻根命令, 解得滑块 A 速度极大值的位置在 $\theta = 0.6853 \text{ rad}$ 附近; 而物块 B 速度极值有两个, 分别在 $\theta = 0.1814 \text{ rad}$ 和 $\theta = 1.2799 \text{ rad}$. 其中物块 B 速度为零的位置正是 α 的余角.

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 杆竖直, 此时二者速度变化规律图像如图 4 所示, 也能看出二者速度并不同步变化.

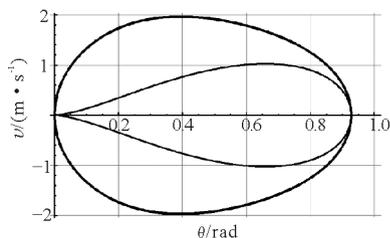


图 4 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时两物体速度随绳子摆角变化规律

3 加速度变化规律

由于牵连体在沿着绳子方向上速度相同,即

$$v_2 = v_1 \cos(\alpha + \theta)$$

两边同时对时间求导,得

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{dv_1}{dt} \cos(\alpha + \theta) + \left[-v_1 \sin(\alpha + \theta) \frac{d\theta}{dt} \right] \quad (8)$$

其中 $a_1 = \frac{dv_1}{dt}$, $a_2 = \frac{dv_2}{dt}$, 分别为 A, B 两物体的加速度大小,且在初始时刻 A 沿杆向下运动, B 竖直向下运动.

而 $\frac{d\theta}{dt}$ 为滑轮左端绳子绕滑轮运动的摆角对时间的变化率,即为摆线摆动的角速度 ω ,若转换参考系可认为 A 沿着杆下滑的一个分运动为随绳子绕滑轮定点做角速度为 ω 的匀速圆周运动,线速度为 A 垂直于绳子方向的速度

$$v_{\perp} = v_1 \sin(\alpha + \theta)$$

即有

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{L} = \frac{v_1 \sin(\alpha + \theta)}{L} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)整合后有

$$a_2 = a_1 \cos(\alpha + \theta) - \frac{v_1^2 \sin^2(\alpha + \theta)}{L} \quad (10)$$

同时对二者受力分析,如图5所示.

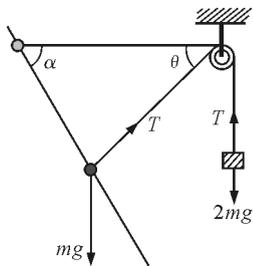


图5 两物体受力示意图

$$\begin{cases} mg \sin \alpha + T \cos(\alpha + \theta) = ma_1 \\ 2mg - T = 2ma_2 \end{cases} \quad (11)$$

消去绳子拉力 T 也可得 A, B 两物体加速度关系

$$a_1 = g \sin \alpha + 2(g - a_2) \cos(\alpha + \theta) \quad (12)$$

联立式(10)和式(12),可得加速度表达式

$$a_1 = \frac{g [\sin \alpha + 2 \cos(\alpha + \theta)]}{1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)} + \frac{v_1^2 \cdot 2 \cos(\alpha + \theta) \sin^2(\alpha + \theta)}{L [1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)]} \quad (13)$$

$$a_2 = \frac{g \cos(\alpha + \theta) [\sin \alpha + 2 \cos(\alpha + \theta)]}{1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)} -$$

$$\frac{v_1^2 \sin^2(\alpha + \theta)}{L [1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)]} \quad (14)$$

将式(6)代入式(13)、(14)即得两物体加速度随绳子摆角变化关系

$$a_1 = \frac{g [\sin \alpha + 2 \cos(\alpha + \theta)]}{1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)} + \frac{4g \cos(\alpha + \theta) \sin^2(\alpha + \theta)}{[1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)]^2} \cdot \frac{[\sin \alpha \sin \theta + 2 \sin(\alpha + \theta) - 2 \sin \alpha]}{\sin \alpha} \quad (15)$$

$$a_2 = \frac{g \cos(\alpha + \theta) [\sin \alpha + 2 \cos(\alpha + \theta)]}{1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)} - \frac{2g \sin^2(\alpha + \theta)}{[1 + 2 \cos^2(\alpha + \theta)]^2} \cdot \frac{[\sin \alpha \sin \theta + 2 \sin(\alpha + \theta) - 2 \sin \alpha]}{\sin \alpha} \quad (16)$$

由 Mathematica 可模拟出二者加速度随摆角之间的变化规律,它们并不同步变化.为了体现与上文的连贯性,我们依然采用以下两个角度加以分析.

当杆与水平面夹角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时,加速度变化规律

如图6所示.

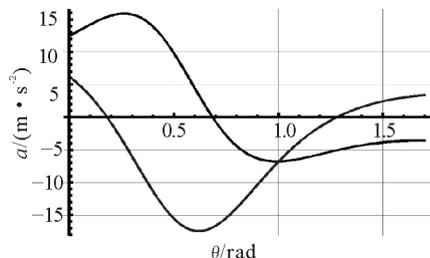


图6 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时两物体加速度随绳子摆角变化规律

由图可知:二者在初始时刻加速度并不为零,一起做加速运动,当加速度为零时速度应达到极值,该图像明显反映出滑块 A 只有一个速度极值,而物块 B 有两个速度极值,其角度大小与上文所得结果一致.

当杆与水平面夹角 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,加速度变化规律

如图7所示.

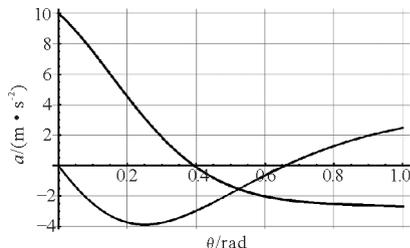


图7 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时两物体加速度随绳子摆角变化规律

(下转第34页)

A 的拉力 T_A , 弹簧测力计 B 的拉力 T_B 组成三角形, 在保持橡皮条对结点 O 的拉力 T 不变的前提下, 以弹簧测力计 A 的拉力 T_A 为半径画矢量圆, 改变其方向使 α 角减小, 做出矢量三角形, 如图 10 所示, 从图形上可以直接得出结论.

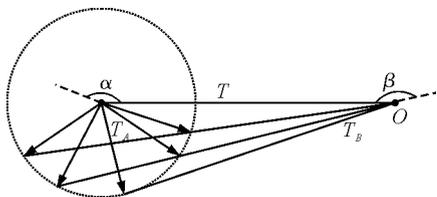


图 10 矢量图法分析例 4

2.5 多力动态平衡转化为三力动态平衡

很多物体的平衡不仅仅局限于三力的汇交情形, 涉及到多个力的平衡, 往往这些问题的解决需要引入摩擦角等, 将力的平衡问题转化为三力动态平衡的几何问题进行处理.

【例 5】一质量为 m 的物体置于倾角为 α 的斜面上, 物体与斜面间的动摩擦因数为 μ , 若要使物体沿斜面向上匀速滑行, 求拉力的最小值.

解析: 教学中对本题常用的处理方法是根据平衡条件, 假设拉力与斜面的夹角为 θ , 利用正交分解得到函数 $F = F(\theta)$, 再求极值, 但运用这种方法, 计算过程非常繁琐, 并且要利用三角函数的推导、变换求解, 对数学知识的要求很高. 我们可以换一种教学思路. 引入全反力, 化四力平衡为三力平衡, 根据矢量三角形求解. 用全反力 R 代替支持力和摩擦力, 则

物体只受到重力 mg , 拉力 F , 全反力 R , 如图 11 所示, 摩擦角 $\varphi = \arctan \mu$, 由矢量三角形和三力动态平衡可知, 当 F 垂直于全反力时, 拉力 F 最小, 此时最小值为

$$F = mg \sin(\alpha + \varphi) = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

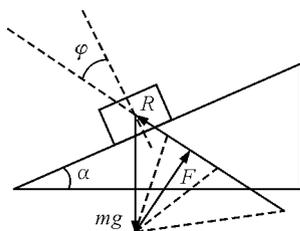


图 11 多力动态平衡转化为三力动态平衡

可以看出, 引入摩擦角的好处就是通过全反力的等效替代, 减少力的个数, 化多力平衡为三力平衡, 通过矢量三角形迅速确定临界平衡状态, 把平衡问题的判断转化为寻求角度之间的关系, 这是求解多力平衡的重要思想方法.

3 结束语

在教学过程中, 通过对上述高考题的分析, 引导学生充分利用解析法、矢量三角形图解法、相似三角形、矢量圆、拉密定理或正弦定理解动态平衡问题, 结合动画展示动态变化过程, 可有效提高学生利用数学工具处理物理问题的能力, 促进发散性科学思维的培养, 有效提高学生的核心能力和创新思维能力, 落实核心素养.

(上接第 30 页)

发现在初始一段时间内物块 B 加速度为负, 说明结果与式(10)和式(11)中假设 B 竖直向下的加速度方向相反: 在此种情况下初始时刻 B 应该是向上加速运动, 这也是与事实相吻合的.

4 总结

分析此类复杂的非匀变速运动我们采用了机械能守恒的方法, 从而避开了运动过程中变化的受力, 相对更简便一些. 对于有些牵连体问题, 二者速度、加速度并非同步变化, 其速度并非同时达到极值, 而是

有先有后. 这就要求教师在教学中对待问题不但要知其然, 还要知其所以然, 分析原因解决疑难. 只有深刻地掌握物理模型, 才能在今后的教学中收放自如.

参考文献

- 1 王波. 探析绳连体模型的加速度关系. 物理教师, 2011, 32(3): 41 ~ 43
- 2 闫峰. 对连接体最大速度位置的分析. 物理教师, 2016, 37(9): 88 ~ 89
- 3 姜付锦. MathCAD 在连接体问题研究中的应用. 物理通报, 2011(12): 75 ~ 78