

小球在粗糙斜面上的一般运动

吴 洵

(鄱阳中学 江西 上饶 333100)

黄亦斌

(江西师范大学物理与电子通信学院 江西 南昌 330022)

(收稿日期:2017-07-24)

摘 要:粗糙斜面上的小球通常只考虑其沿最斜方向上的平面平行运动,本文将其推广,研究小球在斜面上时其质心的一般二维运动(球体本身作三维转动).研究表明,系统(斜面与小球)存在一个参数 λ ,它对小球的运动(无滑还是有滑滚动)有决定作用.无滑滚动时的一般轨迹是抛物线,而有滑滚动时的一般情形则要更复杂,本文给出了其理论分析和质心运动轨迹图,分析了一些特殊情形.还指出了一些易混淆之处,如,摩擦力的方向与轨道的切向无直接关系,小球沿最斜方向运动时并不一定做平面平行运动.

关键词:无滑滚动 有滑滚动 平面平行运动

物体在粗糙斜面上的运动是一种常见的讨论内容.如果物体是滑块,那么它将受到滑动摩擦力;如果是小球,那么摩擦力既可能是滑动摩擦力,也可能是静摩擦力,从而可讨论的内容较为丰富.但针对小球的讨论几乎都是在平面平行运动(在斜面内沿“最斜”方向的一维运动)范围内进行,鲜见针对斜面内二维运动的讨论.本文就此做一般论述.

首先假定:

(1) 小球的质量分布是球对称的,绕质心轴的转动惯量为 $I = kmR^2$,其中 k 为无量纲的常数(决定于小球的质量分布状况), m 为小球质量, R 为其半径;

(2) 忽略静摩擦系数与滑动摩擦系数的差别,设它们都是 μ ;

(3) 小球在斜面上没有蹦跳,一直紧贴斜面.

A Brief Discussion on the Application on Combination Constant in Atomic Physics Calculation

Song Yunpeng Zhang Chun Yang Ningxuan

(Department of Physics, College of Science, Shihezi University, Shihezi, Xinjiang 832003)

Abstract: Combined constants is constituted by the fundamental physical constants, have clear physical significance. The paper analyses the characteristics of combined constants in atomic physics, and expounds the application method of combined constants in dimension analysis and quantitative estimation, and sums up the basic principle of applying the method of combined constants in atomic physics.

Key words: the combined constant method; dimension analysis; quantitative estimation; numerical calculation

1 一般讨论

如图1建立直角坐标系, 小球受支持力 $\mathbf{N} = N\mathbf{k}$, 重力 $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ 和摩擦力 \mathbf{f} , 其中重力加速度 $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_1 = -g_1\mathbf{j} = -g_1\sin\alpha\mathbf{j}$, $\mathbf{g}_2 = -g_2\mathbf{k} = -g_2\cos\alpha\mathbf{k}$. 由质心运动定理, 有

$$N = mg_2 = mg\cos\alpha$$

和

$$\mathbf{f} + m\mathbf{g}_1 = m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \quad (1)$$

由对质心的角动量定理, 有

$$\mathbf{R} \times \mathbf{f} = kmR^2\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (2)$$

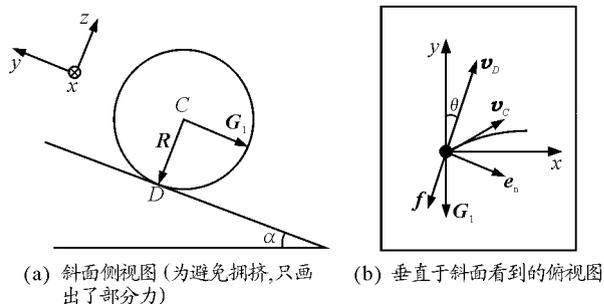


图1

其中 $\mathbf{R} = -R\mathbf{k}$ 从球心指向触地点 D . 由于摩擦力只是跟小球触地点的速度有关(与质心速度无直接关系), 故还需要触地点 D 的速度公式

$$\mathbf{v}_D = v_D\mathbf{e}_t = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (3)$$

其中 \mathbf{e}_t 为 \mathbf{v}_D 方向的单位矢量, v_D 非负. 对于有滑滚动, 有 $v_D \neq 0$, 且滑动摩擦力的方向永远跟 \mathbf{v}_D 的方向相反, 有

$$\mathbf{f} = -\mu N\mathbf{e}_t = -\mu mg_2\mathbf{e}_t \quad (4)$$

对于无滑滚动, 有 $v_D = 0$, 且静摩擦力存在最大值

$$f \leq \mu N \quad (5)$$

以上就是计算的出发点.

在进一步进行具体讨论之前, 我们先导出 \mathbf{v}_C 与 \mathbf{v}_D 的一般关系式. $\mathbf{R} \times (1) - (2)$, 消去 \mathbf{f} , 得

$$kR^2\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \mathbf{R} \times \mathbf{g}_1 = \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \quad (6)$$

而式(3)求导(注意 \mathbf{R} 是常矢量^[1], 因为任意时刻都只关心触地点 D), 可得

$$\frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R} \quad (7)$$

该式中的 $\frac{d\mathbf{v}_D}{dt}$ 并非小球触地点 D 的加速度, 因为求后者时还需加上含 $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ 的项. 上式只表示不同时刻触地点(因而是小球上不同的点)的速度变化. 式(6) $\times \mathbf{R}$ (注意 \mathbf{R} 垂直于斜面, 而 $\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_C$ 平行于斜面), 并由式(7)消 $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ 项, 整理得

$$(1+k)\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} - k\frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = \mathbf{g}_1 \quad (8)$$

故一般而言, \mathbf{v}_C 与 \mathbf{v}_D 无确定关系, 但它们的改变有确定的关系.

2 无滑滚动

先讨论简单情形: 小球保持做无滑滚动. 由于恒有 $v_D = 0$, 故由式(8)得

$$\mathbf{a}_C = \frac{\mathbf{g}_1}{1+k} \quad (9)$$

即小球的质心加速度沿斜面向下且恒定. 故有

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{C0} + \frac{\mathbf{g}_1 t}{1+k} \quad (10)$$

但由于质心初速度 \mathbf{v}_{C0} 方向在斜面内任意, 故此时小球的一般运动是抛物线运动. 把式(9)代入式(1), 可得

$$\mathbf{f} = -\frac{k}{1+k}m\mathbf{g}_1 \quad (11)$$

这是一个常矢量. 关系式(5)进一步给出

$$\lambda \equiv \left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{\mu}{\tan\alpha} \geq 1 \quad (12)$$

这就是无滑滚动对系统参数的要求. 下文将看到, 参数 λ 对小球运动有重要影响. 摩擦系数 μ 越大, 斜面倾角 α 越小, 小球质量分布越集中于球心(k 越小), 则 λ 越大, 就越有利于无滑滚动的出现.

对于小球的角速度, 把式(11)代入式(2), 得到

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{g}_1}{(1+k)R^2} = \frac{g_1}{(1+k)R}\mathbf{i} \quad (13)$$

故角速度的 y, z 分量 ω_y, ω_z 守恒, 而 ω_x 随时间均匀变化. 而由式(3)和 $v_D = 0$, 可以得到

$$\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = 0 \quad (14)$$

其中 $\omega_{//}$ 是角速度的平行分量(x, y 分量). 这就是说, 无滑滚动条件对角速度的垂直分量 ω_z 没有限制, 但对其平行分量(特别是其初值)提出了要求

$$\omega_{//0} = \frac{\mathbf{v}_{C0} \times \mathbf{R}}{R^2} \quad (15)$$

故而, 小球做无滑滚动时, ω_z 任意且守恒, ω_y 受约束且守恒, 而 ω_x 也受约束, 且随时间做线性变化.

作为无滑滚动的一种特殊情形, 由式(10), 如果 \mathbf{v}_{C0} 沿 y 方向, 则小球(即小球质心)会一直沿 y 方向做匀变速直线运动. 但这并不一定就是平面平行运动, 因为此时只有 $\omega_y=0$ [见式(15)]. 当 $\omega_z=0$ 也满足时, 小球才做常见的平面平行运动.

当式(12)满足时, 若初始时 $\mathbf{v}_D=0$, 则此后小球将一直做无滑滚动; 若初始时 $\mathbf{v}_D \neq 0$, 则小球将先做一段有滑滚动, 直至 $\mathbf{v}_D=0$ 时进入无滑滚动. 但当式(12)不满足时, 即使初始时 $\mathbf{v}_D=0$, 此后小球也将做有滑滚动, \mathbf{v}_D 变得不为零. 故此时小球在整个运动过程中至多在某一瞬间满足 $\mathbf{v}_D=0$, 不可能出现在某段时间内维持 $\mathbf{v}_D=0$ 的情况.

3 有滑滚动

以下一般性地讨论有滑滚动. 此时由式(1)和式(4), 得

$$-\mu g_2 \mathbf{e}_t + \mathbf{g}_1 = \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \quad (16)$$

将上式代入式(8), 注意 $g_2 = \frac{g_1}{\tan \alpha}$, 得

$$\frac{d\mathbf{v}_D}{dt} + \lambda g_1 \mathbf{e}_t = \mathbf{g}_1 \quad (17)$$

其中常数 λ 见式(12). 这就是触地点速度满足的方程. 将其沿如图1(b)所示的 \mathbf{v}_D 方向 \mathbf{e}_t 和在斜面内与其垂直的方向 \mathbf{e}_n 做正交分解, 得

$$\begin{aligned} \frac{dv_D}{dt} + \lambda g_1 &= -g_1 \cos \theta \\ v_D \frac{d\theta}{dt} &= g_1 \sin \theta \end{aligned} \quad (18)$$

两式消 dt , 得

$$\frac{dv_D}{v_D} = -\left(\cot \theta + \frac{\lambda}{\sin \theta}\right) d\theta$$

两边积分, 设 v_D, θ 的初始值分别为 v_{D0}, θ_0 ($v_{D0} \neq 0$

且 $\theta_0 \neq 0, \pm\pi$), 则

$$v_D = \frac{v_{D0}}{f(\theta_0)} f(\theta)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\sin |\theta| [\tan(|\theta|/2)]^\lambda} \quad (19)$$

注意, θ 和 θ_0 必须同正同负, 处于 $(-\pi, 0)$ 和 $(0, \pi)$ 这两个不连通分支中的同一支. 将式(19)代入式(18)中的任一式, 都可得到

$$\frac{v_{D0}}{f(\theta_0)} \frac{d|\theta|}{\sin^2 \theta [\tan(|\theta|/2)]^\lambda} = g_1 dt \quad (20)$$

上式两边积分(设 $\lambda \neq 1$), 有

$$\frac{v_{D0}}{(\lambda^2 - 1)} \left[\frac{f(\theta)}{f(\theta_0)} (\cos \theta - \lambda) - \cos \theta_0 + \lambda \right] = g_1 t \quad (21)$$

式(20)表明 $|\theta|$ 随时间 t 单调增加, 而式(19)给出 v_D 随 θ 或 $|\theta|$ 的关系: $v_D \propto f(\theta)$. 分析函数 $f(\theta)$ 本身, 或作出其图像(图2), 可以得到, $f(\theta)=0$ 的充要条件是 $\lambda > 1$ 且 $|\theta|=\pi$. 故而, 仅当系统参数 $\lambda > 1$ [见式(12)]时, 小球才能经过一段时间后进入无滑滚动状态($v_D=0$). 把 $|\theta|=\pi$ 或 $f(\theta)=0$ 代入式(21), 得到有滑滚动的持续时间为

$$t_0 = \frac{v_{D0}(\lambda - \cos \theta_0)}{g_1(\lambda^2 - 1)} \quad (22)$$

若 $\lambda < 1$, 则小球永远做有滑滚动, 而 v_D 依初始条件的不同或先变小后变大, 或一直变大, 且终将无限增大(只要斜面的尺度足够). 对于 $\lambda=1$ 的临界情形, 其讨论意义不大, 从略.

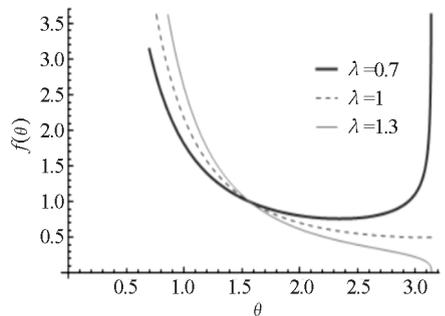


图2 函数 $f(\theta)$ 的图像, 其中 θ 以弧度为单位

下面讨论小球的运动轨道. 首先要指出的是, 分解式(18)所使用的两个正交方向并非小球轨道的切向和法向. 后者决定于 \mathbf{v}_C , 而 \mathbf{v}_C 不同于 \mathbf{v}_D (故而摩擦力的方向与轨道的切向无直接关系), 这在图

1(b)中已明确画出,式(19)~(21)给出了 v_D 的详尽信息,于是由式(8)也就可以得到 v_C 的详尽信息,从而可以得到小球轨道.具体地,式(8)给出

$$v_C = v_{C0} + \frac{k}{1+k}(v_D - v_{D0}) + \frac{g_1 t}{1+k}$$

取其直角分量,有

$$\frac{dx_C}{dt} = \frac{dx_C}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} =$$

$$v_{C0x} + \frac{k}{1+k}(v_D \sin \theta - v_{D0} \sin \theta_0)$$

$$\frac{dy_C}{dt} = \frac{dy_C}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = v_{C0y} +$$

$$\frac{k}{1+k}(v_D \cos \theta - v_{D0} \cos \theta_0) - \frac{g_1 t}{1+k}$$

把式(19)的 v_D 和式(21)的 $g_1 t$ 代入,又由式(20)得到 $\frac{dt}{d\theta}$,便可以把 $\frac{dx_C}{d\theta}$, $\frac{dy_C}{d\theta}$ 用 θ 来表示,从而积分得到以 θ 为参数的轨道方程

$$x_C = \frac{v_{D0}^2 f(\theta)}{g_1 (1+k) f(\theta_0)} \left\{ \frac{\cos \theta - \lambda}{\lambda^2 - 1} \right. \\ \left. \left[\left[(1+k) \frac{v_{C0x}}{v_{D0}} - k \sin \theta_0 \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\eta k (\cos \theta - 2\lambda)}{(4\lambda^2 - 1) [\tan(|\theta|/2)]^\lambda f(\theta_0)} \right] \right\} \Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$y_C = \frac{v_{D0}^2 f(\theta)}{8g_1 (1+k) (\lambda^2 - 1)^2 f(\theta_0)} \\ \left\{ 8(\cos \theta - \lambda) \left[(1+k)(\lambda^2 - 1) \frac{v_{C0y}}{v_{D0}} - \right. \right. \\ \left. \left. \lambda + (1+k - k\lambda^2) \cos \theta_0 \right] \right. \\ \left. - [4(\lambda^2 - 1) - (k\lambda^2 - k - 2)] \right. \\ \left. (3 - 4\lambda \cos \theta + \cos 2\theta) \right\} \frac{f(\theta)}{f(\theta_0)} \Big|_{\theta_0}^{\theta} \quad (23)$$

其中, x_C 中的 $\eta = \text{sign}(\theta) = \text{sign}(\theta_0)$ 是 θ_0, θ (二者同号)的符号函数,即当 $\theta > 0$ 时 $\eta = 1$,而当 $\theta < 0$ 时 $\eta = -1$.它的出现很容易理解:当初始条件 v_{C0x}, θ_0 都反号而 v_{C0y} 不变时,两条轨道显然关于 y 轴对称,故需要 x_C 也反号. η 就保证了这一点.

图3给出了一些 $\lambda < 1$ 时的小球质心轨道,其中 x, y 轴都以 $\frac{v_{D0}^2}{g_1}$ 为单位[注意图3(a)中两方向上的单位不一样长],且取 $\lambda = 0.7, \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (即 v_{D0} 沿 x 轴

正方向), $k = \frac{2}{5}$ (小球质量分布均匀).图3(a)中,质心初速度取为 $v_{C0} = a(1, 9)v_{D0}$,也就是说,图中各轨道的质心初速度方向都相同,沿(1, 9)方向,仅大小不同,由 a 值(已标记在各轨道图线附近)表征.尽管质心初速度沿右上方向,但其轨道却并非一定保持在 y 轴右边.这很好解释:由于 v_{D0} 向右,故摩擦力向左;加上沿 $-j$ 方向的重力分力,小球所受的外力矢量和沿左下方向.如果质心初速度较小,那么小球的轨道将被拉向左下方(如前5条);仅质心初速度较大时,轨道才保持在 y 轴右边(如后两条).图3(b)中,质心初速度大小都为 $0.4v_{D0}$,但方向各不相同.虽然质心初速度方向的分布关于 y 轴是对称的,但对应的轨道并不对称,因为我们选取的 v_{D0} 没有对称性.

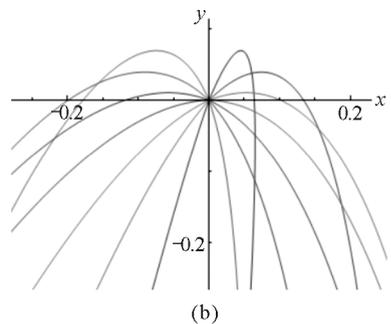
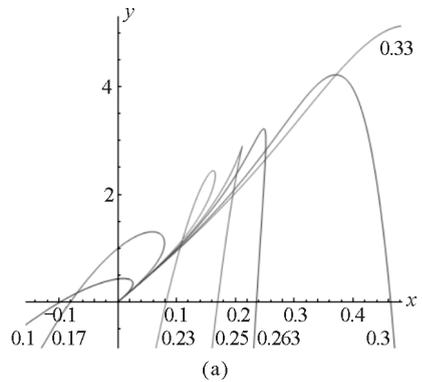


图3 小球的质心轨道

4 一些特殊情形

(1) v_{D0} 沿 y 轴负方向,即 $v_{D0} \neq 0$ 且 $\theta_0 = \pi$.此时,小球一直保持 $\theta = \pi$ (除非 $v_D = 0$ 使得 θ 无定义).式(18)给出

$$\frac{dv_D}{dt} = (1 - \lambda)g_1 \quad (24)$$

故有

$$\mathbf{v}_D = -\mathbf{j}[v_{D0} + (1-\lambda)g_1 t] \quad (25)$$

式(8)给出

$$\mathbf{a}_C = \left(1 - \frac{k\lambda}{1+k}\right) \mathbf{g}_1 \quad (26)$$

故一般而言小球在斜面上做抛物线运动(以沿 y 轴方向的匀变速直线运动为特例). 若 $\lambda < 1$, 则式(25)表明 v_D 一直增加, 小球一直做有滑滚动, 会如上所述一直运动下去. 若 $\lambda > 1$, 则经过一段时间后 $v_D = 0$. 此后小球一直做无滑滚动, 由式(9)~(10)所描述.

(2) $v_{D0} = 0$, 这使得 θ_0 无意义. 此时, 若 $\lambda > 1$, 则小球一直保持 $v_D = 0$ 而做无滑滚动. 若 $\lambda < 1$, 则可以先假设没有摩擦, 即令式(17)中 $\lambda = 0$, 于是极短时间内 \mathbf{v}_D 沿 \mathbf{g}_1 方向, 于是 \mathbf{e}_t 也沿 \mathbf{g}_1 方向. 此时恢复摩擦, 式(17)给出同情形(1)一样的结果. 小球的运动轨迹一般而言也是抛物线.

(3) \mathbf{v}_{D0} 沿 y 轴正方向, 即 $v_{D0} \neq 0$ 且 $\theta_0 = 0$. 此时, 小球至少在开始后的一段时间内保持 $\theta = 0$. 式(18)给出

$$\frac{dv_D}{dt} = -(1+\lambda)g_1 \quad (27)$$

式(8)给出

$$\mathbf{a}_C = \left(1 + \frac{k\lambda}{1+k}\right) \mathbf{g}_1 \quad (28)$$

(注意此时 $\mathbf{g}_1 = -g_1 \mathbf{j} = -g_1 \mathbf{e}_t$) 式(27)说明, 经过一段时间后一定会出现 $v_D = 0$. 此后的运动已由情形(2)给出. 一般而言, 不论 λ 如何, 前一阶段(有滑滚动)的轨迹与后一阶段(无滑滚动或新的有滑滚动)的轨迹不是同一条抛物线.

(4) $\alpha = 0$, 即斜面其实是水平面. 此时

$$g_1 = 0 \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \lambda g_1 \rightarrow \frac{1+k}{k} \mu g \quad (29)$$

小球最终一定做无滑滚动. 式(17)变为^[1]

$$\frac{d\mathbf{v}_D}{dt} + \frac{1+k}{k} \mu g \mathbf{e}_t = 0$$

由于 $d\mathbf{v}_D = d(v_D \mathbf{e}_t) = \mathbf{e}_t dv_D + v_D d\mathbf{e}_t$, 而 $\mathbf{e}_t \perp d\mathbf{e}_t$, 故

上式给出 $d\mathbf{e}_t = 0$ 和

$$\frac{dv_D}{dt} + \frac{1+k}{k} \mu g = 0 \quad (31)$$

于是, \mathbf{v}_D 的方向不变, 而大小随时间线性减小. 由式(30)和式(8)可求出

$$\mathbf{a}_C = -\mu g \mathbf{e}_t \quad (32)$$

故而小球一般而言也是做抛物线运动, 且其质心加速度的方向决定于初始时 \mathbf{v}_{D0} 的方向. 由式(31)得到, 经过时间

$$t_0 = \frac{k v_{D0}}{(1+k)\mu g} \quad (33)$$

后, 小球转为无滑滚动. 此后, 式(9)给出 $\mathbf{a}_C = 0$, 即小球做匀速直线运动. 式(32)亦可由式(16)、(26)或(28)得到, 而式(33)也可由式(22)得到, 只要考虑到条件式(29)即可.

(5) yz 平面中的平面平行运动, 这是最常见的情形. 此时, $\omega_y = \omega_z = 0$, 即角速度只有 x 分量, 而小球上任一点的速度只有 y, z 分量. 前面的无滑滚动和上面的情形(1)~(4)都存在这种特殊情形, 其讨论皆对此情形成立, 只要再加上“ $\mathbf{v}_{D0}, \mathbf{v}_{C0}$ 都沿 y 方向”的条件即可.

5 小结

本文从刚体力学出发, 研究了粗糙斜面上小球的一般运动(质心做二维运动, 球体本身做三维转动). 研究表明, 系统(斜面与小球)存在一个参数, 它对小球的运动(无滑还是有滑滚动)有决定作用. 无滑滚动时的一般轨迹是抛物线, 而有滑滚动时的一般情形则要更复杂, 本文给出了其理论分析和质心运动轨迹图也分析了一些特殊情形还指出了一些易混淆之处, 如, 摩擦力的方向与轨道的切向无直接关系, 小球沿最斜方向运动时并不一定做平面平行运动.

参考文献

- 1 马尔契夫. 理论力学(第三版). 李俊峰译. 北京: 高等教育出版社, 2006. 287