探究杆连接体绕轴运动动能的计算方法

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2017－08－04）

摘　要：以两个质点组成的杆连接体绕固定转动轴转动问题为例，定量推证了在质心参考系中一个物体相对于另一个物体运动的动能等于两个物体相对于系统质心运动的动能之和的结论，并对两道经典试题给出多种解答方法.

关键词：质点组　质心　动能　柯尼希定理

质点组的重力势能等于全部质量集中于质心的势能，但质点组的动能不一定等于全部质量集中于质心的动能. 在各质点相对静止的条件下，若质点组只发生平动，则质点组的动能等于全部质量集中于质心的动能；如果质点组发生转动，那么质点组的动能与全部质量集中于质心的动能有何关系呢？柯尼希定理反映了二者的关系，即质点组的动能等于全部质量集中于系统质心的动能与各质点相对于质心的动能之和.

对于杆（指质量忽略的刚性杆）连接体，在绕垂直于杆的固定轴转动的过程中，二者相对于系统质心转动的角速度相同，则相对于质心运动的线速度大小跟质点到系统质心的距离成正比，即$\frac{v'_1}{v'_2}=\frac{r_1}{r_2}$，而质点到系统质心的距离与质量成反比，即$\frac{m_1}{m_2}=\frac{r_2}{r_1}$，将两个等式相乘可得两个质点相对质心的动量大小之比为$\frac{P'_1}{P'_2}=1$，即动量大小相等. 由于二者相对于系

可以得到运动学方程为

$$x=v_0t\cos\alpha+\omega v_0t^2\sin\alpha\sin\lambda \tag{17}$$

$$y=v_0t\sin\alpha-\omega v_0t^2\cos\alpha\sin\lambda+\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda \tag{18}$$

$$z=h-\frac{1}{2}gt^2+\omega v_0t^2\sin\alpha\cos\lambda \tag{19}$$

3　地球自转对平抛物体落地时间的影响

由式(19)知，当$z=0$时可以求出物体的下落时间为

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g-2\omega v_0\sin\alpha\cos\lambda}} \tag{20}$$

由式(20)可知考虑地球自转后，受科里奥利力影响，平抛物体落地时间变长了.

4　地球自转对平抛体落地偏移量的影响

由式(17)和式(18)可知，考虑了地球自转后，由于科里奥利力的影响，平抛体落地时产生的偏移量为

$$\Delta x=\omega v_0t^2\sin\alpha\sin\lambda \tag{21}$$

$$\Delta y=-\omega v_0t^2\cos\alpha\sin\lambda+\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda \tag{22}$$

从式(21)和式(22)可知，落地位置的实际偏离是x，y两个方向偏离分量的合成.

对于x方向的偏离分量Δx，由式(21)知，在初速度v_0相同情况下，两极处($\lambda=\pm 90°$)偏移量最大，赤道处($\lambda=0$)偏移量为零；在同纬度下，沿南北方向抛出时($\alpha=0$或$180°$)，Δx偏移分量为零，即不发生南北方向的偏移.

对于y方向的偏移分量Δy，由式(22)可知：若$\Delta y>0$，$t>\frac{3v_0\cos\alpha\tan\lambda}{g}$，利用$h=\frac{1}{2}gt^2$粗略估计出物体在高度

$$h=\frac{(3v_0\cos\alpha\tan\lambda)^2}{2g}$$

以上抛出时，落地点有东偏分量，否则落地点有西偏分量.

参 考 文 献

1　周衍柏. 理论力学教程(第 3 版)[M]. 北京：高等教育出版社，2009. 189 ～ 191

统质心运动的速度方向相反，则两个质点相对于质心的动量的方向相反，因此在质心参考系中，质点系的总动量为零，或者说系统的总动量保持不变. 只要满足该条件，就可认为其中一个物体固定不动，另一个物体的折合质量为

$$m'=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

若求出一个物体相对于另一个物体的相对速度 v'，则相对运动的动能为

$$E'_{\rm k}=\frac{1}{2}m'v'^2$$

利用质心坐标系的性质 $\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}'_i=0$ 和在质心坐标系中两物体的相对速度 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}'_1-\boldsymbol{v}'_2$ 可知

$$m_1v'_1=m_2v'_2 \qquad v'=v'_1+v'_2$$

因此，两个物体相对于系统质心运动的动能之和为

$$E'_{\rm kC}=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2=\frac{1}{2}m'v'^2$$

由此可见，一个物体相对于另一个物体运动的动能等于两个物体相对于系统质心运动的动能之和，即一个物体相对于另一个物体的动能等于两个物体相对于系统质心的动能之和.

对于两个质点构成的杆连接体，在对系统应用机械能守恒定律列方程时，关键是计算动能，可有 4 种方法，下面进行举例分析.

【例 1】如图 1 所示，质量均为 m 的两个小球 A 和 B，分别固定在一长为 l 的轻杆中点和一端. 整个装置从水平位置开始绕固定轴 O 自由转动，求杆运动到竖直位置时两球的速度各为多大？

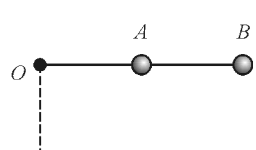

图 1　例 1 题图

错解：质心 C 到转轴的距离为 $h=\frac{3}{4}l$，设想全部质量集中于质心，由动能定理有

$$2mg\cdot\frac{3}{4}l=\frac{1}{2}\times 2mv_C^2$$

可得系统的质心速度为 $v_C=\sqrt{\frac{3}{2}gl}$. 由于 A，B，C 这 3 点具有相同的瞬时角速度，则 $\frac{v_C}{v_B}=\frac{h}{l}$ 所以

$$v_A=\frac{2}{3}v_C=\sqrt{\frac{2}{3}gl} \qquad v_B=\sqrt{\frac{8}{3}gl}$$

辨析：对于质点组的转动过程，全部质量集中于系统质心的动能不等于各质点的动能之和.

解法 1：利用质点运动的动能公式

系统势能减少量等于系统动能增加量，即

$$m_Ag\,\frac{l}{2}+m_Bgl=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2$$

由于二者做圆周运动的瞬时角速度相同，则有 $v_B=2v_A$，而 $m_A=m_B$，代入方程可得

$$v_A=\sqrt{\frac{3}{5}gl} \qquad v_B=\sqrt{\frac{12}{5}gl}$$

解法 2：利用刚体转动的动能公式

对系统由机械能守恒定律得

$$2mg\cdot\frac{3}{4}l=\frac{1}{2}I\omega^2$$

连接体的转动惯量为

$$I=m_A\,\frac{l^2}{4}+m_Bl^2=\frac{5}{4}ml^2$$

联立方程可得瞬时角速度为

$$\omega=\sqrt{\frac{12g}{5l}}$$

所以线速度大小分别为

$$v_A=\frac{l}{2}\omega=\sqrt{\frac{3}{5}gl} \qquad v_B=l\,\omega=\sqrt{\frac{12}{5}gl}$$

解法 3：利用两个物体相对于系统质心的动能和柯尼希定理

两球的速度分别为 $v_1=\frac{2}{3}v_C$，$v_2=\frac{4}{3}v_C$，则相对于质心的速度大小都为 $v'_1=v'_2=\frac{1}{3}v_C$，因此两球相对于质心做圆周运动的动能之和为

$$E'_{\rm kC}=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2=2\times\frac{1}{2}m\left(\frac{v_C}{3}\right)^2$$

对系统由机械能守恒定律可知系统转到竖直位置时对地面的动能 $E_{\rm k}$ 等于它在水平位置时的重力势能 $E_{\rm pC}$，又据柯尼西定理得

$$E_{\rm k}=E_{\rm pC}=E_{\rm kC}+E'_{\rm kC}$$

即
$$2mg\cdot\frac{3}{4}l=\frac{1}{2}(2m)v_C^2+m\left(\frac{v_C}{3}\right)^2$$

化简得

$$\frac{3}{2}gl=v_C^2+\frac{1}{9}v_C^2$$

由此得　　$v_C=\sqrt{\dfrac{27gl}{20}}$

所以

$$v_1=\sqrt{\frac{3}{5}gl}\qquad v_2=\sqrt{\frac{12}{5}gl}$$

解法 4:利用一个物体相对于另一个物体的动能和柯尼希定理

由于在质心参考系中质点系的总动量为零,即系统的总动量保持不变,因此可认为其中一个小球固定不动,则另一个小球的折合质量为

$$m'=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

由于两球的质量相等,可得折合质量为 $m'=\dfrac{1}{2}m$.

系统的质心 C 到转轴的距离为 $h=\dfrac{3}{4}l$,设质心速度为 v_C,则两球的速度分别为 $v_1=\dfrac{2}{3}v_C$,$v_2=\dfrac{4}{3}v_C$,那么二者的相对速度为 $v'=\dfrac{2}{3}v_C$.二者相对运动的动能为 $E_{kC}=\dfrac{1}{2}m'v'^2$,等于两个物体相对于系统质心运动的动能之和,对系统由柯尼希定理和机械能守恒定律有

$$2mg\cdot\frac{3}{4}l=\frac{1}{2}(2m)v_C^2+\frac{1}{2}m'v'^2$$

联立各式得

$$\frac{3}{2}gl=v_C^2+\frac{1}{9}v_C^2$$

由此得　　$v_C=\sqrt{\dfrac{27gl}{20}}$

所以　　$v_1=\sqrt{\dfrac{3}{5}gl}\qquad v_2=\sqrt{\dfrac{12}{5}gl}$

【例 2】质量不计的直角形支架两端分别连接质量为 $2m$ 和 $3m$ 的小球 A 和 B,不考虑小球的形状,支架的两直角边长度分别为 $2l$ 和 l,支架可绕固定轴 O 在竖直平面内无摩擦转动,如图 2 所示,开始时 OA 边处于水平位置,由静止释放,求小球 A 在下落过程中的最大速度.

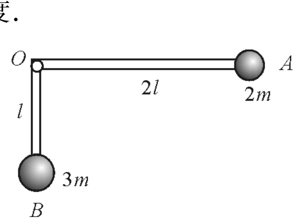

图 2　例 2 题图

解法 1:利用质点运动的动能公式

设支架转过的角度为 θ,根据系统势能减少量等于系统动能增加量有

$$2mg\cdot 2l\sin\theta-3mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2mv_A^2+\frac{1}{2}\cdot 3mv_B^2$$

由于二者做圆周运动的瞬时角速度相同,则有 $v_B=\dfrac{v_A}{2}$,代入方程可得

$$gl(4\sin\theta+3\cos\theta-3)=v_A^2+\frac{3}{8}v_A^2$$

即　　$\dfrac{11}{8}v_A^2=gl(4\sin\theta+3\cos\theta-3)$

令 $y=4\sin\theta+3\cos\theta-3$,取导数得

$y'=4\cos\theta-3\sin\theta$,令 $y'=0$ 得 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$,此时小球 A 的速度 v_A 取最大值,可得

$$v_{A\max}=4\sqrt{\frac{gl}{11}}$$

解法 2:利用刚体转动的动能公式

对于球杆转动系统,当各质点对转动轴的力矩为零时,各质点的动能分别同时达到最大.设支架转过的角度为 θ,根据杠杆平衡条件有

$$2mg\cdot 2l\cos\theta=3mgl\sin\theta$$

可得 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$,则

$$\sin\theta=\frac{4}{5}\qquad\cos\theta=\frac{3}{5}$$

对系统由机械能守恒定律有

$$2mg\cdot 2l\sin\theta-3mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}I\omega^2$$

连接体的转动惯量为

$$I=2m\cdot 4l^2+3ml^2=11ml^2$$

联立方程可得瞬时角速度为 $\omega=\sqrt{\dfrac{4g}{11l}}$,所以小球 A 的线速度最大值为

$$v_{A\max}=2l\omega=4\sqrt{\frac{gl}{11}}$$

解法 3:利用两个质点相对于质心运动的动能公式和柯尼希定理

如图 3 所示,以 O 点为坐标原点,沿两杆方向建立直角坐标系,且 y 轴正方向向下,则两球的位置坐标为 $A(2l,0)$,$B(0,l)$,根据质心公式可知系统开始时的质心位置坐标为

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{4l}{5}$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{3l}{5}$$

可知质心 C 到 O 点的距离为 $r_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = l$. 在运动过程中,3 个点的速度大小关系为 $v_A = 2v_C$,$v_B = v_C$.

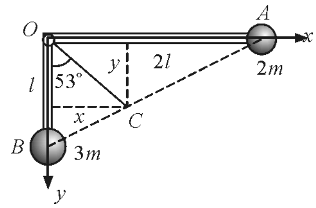

图 3　小球和系统质心在直角坐标系中的位置

由图 3 可知,线段 OB 与 OC 的夹角 θ 满足 $\tan\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$,则 $\theta = 53°$. 速度 v_A 与 v_C 的夹角等于线段 OA 与 OC 的夹角为 $\alpha = 37°$,则 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$,速度矢量三角形如图 4 所示,由余弦定理可知相对速度的大小满足

$$v'^2_A = v_C^2 + v_A^2 - 2v_C v_A \cos 37° = \frac{9}{5} v_C^2$$

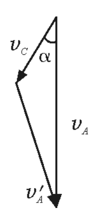

图 4　速度矢量三角形

速度 v_B 与 v_C 的夹角等于线段 OB 与 OC 的夹角为 $\theta = 53°$,则 $\cos\theta = \frac{3}{5}$,由余弦定理可知相对速度的大小满足

$$v'^2_B = v_C^2 + v_B^2 - 2v_C v_B \cos 53° = \frac{4}{5} v_C^2$$

因此两球相对于质心运动的动能为

$$E'_{kC} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_A + \frac{1}{2} m_2 v'^2_B = 3mv_C^2$$

将两球视为一个质量为 $5m$ 的球放在 C 点,当杆转过 $\theta = 53°$ 时系统的质心下降到 O 点正下方,系统的势能最小,则两球运动的速度最大. 由机械能守恒定律有

$$5mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} \cdot 5mv_C^2 + E'_{kC}$$

可得 $v_C = \sqrt{\frac{4gl}{11}}$,所以 $v_{A\max} = 4\sqrt{\frac{gl}{11}}$.

解法 4:利用两个质点相对运动的动能公式和柯尼希定理

如图 3 所示,质心 C 的位置满足 $2\overline{AC} = 3\overline{BC}$,则由三角形相似可知 $\frac{x}{2l} = \frac{2}{5}$,$\frac{y}{l} = \frac{3}{5}$,得 $x = \frac{4l}{5}$,$y = \frac{3l}{5}$.

质心 C 到 O 点的距离为 $r_C = \sqrt{x^2 + y^2} = l$. 在运动过程中,速度大小关系为 $v_A = 2v_B = 2v_C$,设 $v_A = v$,由于两球的速度互相垂直,则相对速度大小为

$$v' = \sqrt{v^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} v$$

在质心参考系中,折合质量为

$$m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{6}{5} m$$

可知二者相对运动的动能为

$$E'_k = \frac{1}{2} m' v'^2 = \frac{3}{4} mv^2$$

即为两个物体相对于系统质心运动的动能之和.

当系统的质心下降高度为 $\Delta h = r_C - y = \frac{2l}{5}$ 时,小球运动的速度最大,对系统由柯尼希定理和机械能守恒定律有

$$5mg \cdot \frac{2l}{5} = \frac{1}{2} \cdot 5mv_C^2 + E'_k$$

所以小球 A 的最大速度为

$$v_{A\max} = 4\sqrt{\frac{gl}{11}}$$

总之,对于杆连接体绕轴转动问题,在应用系统机械能守恒定律求速度时,关键是求质点组的动能,可有 4 种方法. 在解题时应用的物理规律主要有系统机械能守恒定律、柯尼希定理、相对动能的两种等价形式以及转动惯量、折合质量、杠杆平衡条件、质心的性质和相关的数学知识. 多种方法所得结果相同,殊途同归,从而验证了有关规律的正确性.

参 考 文 献

1　周衍柏. 理论力学教程(第 2 版)[M]. 北京:高等教育出版社,1986. 127

2　柏露枝. 用杠杆平衡条件巧解球杆转动系统的最大速度[J]. 物理教学探讨(上半月),2013,31(1):53

3　金文力. 如此求速度错在哪里?[J]. 物理教学,2010,32(11):50

4　金爱兵,董菲菲. 由一道题的错解牵出对质点组动能的理解[J]. 物理教师,2012,33(8):24 ～ 25