一般非惯性系中的刚体动力学

陈余华
（江西省大余中学　江西 赣州　341500）
黄亦斌
（江西师范大学物理与通信电子学院　江西 南昌　330022）

（收稿日期:2017－08－04）

摘　要:将一般非惯性系中的质点动力学推广到刚体动力学,包括非惯性系中的质心运动定理和对质心的角动量定理,得出它们的一般矢量表达式.二者构成非惯性系中刚体动力学的完备方程组.具体的讨论表明,一般来说,惯性力对质心的力矩之和不为零,或惯性力的合力并不通过质心.最后对两定理进行了举例说明.

关键词:非惯性系　刚体动力学　惯性力　科里奥利力

1　理论

在一般旋转的非惯性系中,质点的加速度 $\boldsymbol{a}'$ 与其在惯性系中的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的关系[1] 为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}')+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}' \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{a}_0$ 为旋转系原点的加速度,$\boldsymbol{\Omega}$,$\boldsymbol{\alpha}$ 为旋转系的角速度和角加速度,$\boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{v}'$ 为质点在旋转系中的矢径和速度.由此可以得到非惯性系中的质点动力学表达式[1]

$$\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a}_0-m\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}'-m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}')-2m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'=m\boldsymbol{a}' \tag{2}$$

左边第一项为真实力,其他都是惯性力,包括牵连惯性力$-m\boldsymbol{a}_0-m\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}'-m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}')$和科里奥利力$-2m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'$.这就是说,牛顿第二定律的形式在各种参考系中都是一样的,只要加上各种惯性力.

质点系情形会如何? 此时,式(2)中新增的惯性力都是外力,内力情形不变,故而各种结论不变,只要在外力项中增加惯性力项即可.文献[2]给出了一般非惯性系中的质点系角动量定理.本文欲讨论其中的刚体动力学方程.教材[3]对此有讨论,但其主要使用分量语言,且主要是举例说明.本文将使用矢量语言,并给出一般结论.

令$\boldsymbol{r}'_c$,$\boldsymbol{v}'_c$,$\boldsymbol{a}'_c$分别为旋转系中质心的位矢、速度和加速度.质心运动定理为

$$\sum_i\boldsymbol{F}_i-\sum_i m_i[\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}'_i+$$

The Practice and Exploration on Entrance Education of Photoelectric Specialty Freshman under Co－educating People Mode

Wang Ying　Wang Chunsheng　Zhang Suheng　Li Xu　Su Ya　Feng Ting　Li Panlai
(College of Physics Science and Technology, Hebei University, Baoding, Heibei　071002)

Abstract: The first year at university is a crucial period for freshmen's adaptation and transformation. It is of great significance for the academic planning during university period and career planning in the future. This article has introduced some of the research practice from photoelectricity information science and engineering teachers in HeBei University and described how they helped the freshmen to integrate into university life as soon as possible under the guidance of co－educating people mode.

Key words: entrance education; co－educating people mode; specialty identity

$$\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'_i)+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'_i]=M\boldsymbol{a}'_c$$

其中$\boldsymbol{r}'_i$,$\boldsymbol{v}'_i$为质点i相对于转动系的位矢和速度.由于$\sum_i m_i=M$,且

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i&=M\boldsymbol{r}'_c\\ \sum_i m_i\boldsymbol{v}'_i&=M\boldsymbol{v}'_c\end{aligned}\qquad(3)$$

故有

$$\sum_i\boldsymbol{F}_i-M\boldsymbol{a}_0-M\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}'_c-M\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'_c)-2M\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'_c=M\boldsymbol{a}'_c\qquad(4)$$

这就是一般非惯性系中的质心运动定理.可见,就此而言,各处惯性力的效应只需集中于质心即可.这其实是因为,式(3)是矢径(或速度)的一次式,而质心正是按一次式等效来定义的.

角动量定理则内容丰富多了.令$\boldsymbol{r}_{ic}$,$\boldsymbol{r}'_{ic}$分别为惯性系中和旋转系中质点i相对于质心的位矢,ω'为旋转系中刚体的角速度.刚体对质心的角动量定理为

$$\sum_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times\boldsymbol{F}_i-\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times[\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}'_i+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'_i)+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'_i]=\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_c\cdot\omega')\qquad(5)$$

其中,$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}$为旋转系中的相对时间导数

$$\boldsymbol{I}_c=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_{ic}^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{r}_{ic}\boldsymbol{r}_{ic})=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}'^2_{ic}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{r}'_{ic}\boldsymbol{r}'_{ic})\qquad(6)$$

为刚体对质心的转动惯量张量,$\boldsymbol{E}$为单位张量.注意相对于质心的位矢与参考系无关,故有$\boldsymbol{r}_{ic}=\boldsymbol{r}'_{ic}$.式(5)中的各种惯性力矩是本文讨论的核心内容.

由于$\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}=0$,惯性力矩第一项简单

$$-\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times\boldsymbol{a}_0=0$$

后几项由于是矢径(或速度)的二次式,就不可能还是那么简单了.以下逐项分析.惯性力矩第二项等于

$$-\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times[\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{r}'_{ic}+\boldsymbol{r}'_c)]=-\sum_i m_i\boldsymbol{r}'^2_{ic}\boldsymbol{\alpha}+\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\boldsymbol{r}'_{ic}\cdot\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{I}_c\cdot\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{I}_c\cdot\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$$

惯性力矩第三项等于

$$\begin{aligned}&-\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times\{\boldsymbol{\Omega}\times[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}'_{ic}+\boldsymbol{r}'_c)]\}=\\&-\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times[\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}'_{ic})-\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{r}'_{ic}]=\\&-\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}'_{ic})=-\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{I}_c\cdot\boldsymbol{\Omega}\end{aligned}$$

而科里奥利力矩为

$$\begin{aligned}&-\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times[2\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{v}'_{ic}+\boldsymbol{v}'_c)]=\\&-2\boldsymbol{\Omega}(\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\cdot\boldsymbol{v}'_{ic})+2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\boldsymbol{v}'_{ic})=\\&-2\boldsymbol{\Omega}(\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\cdot\boldsymbol{v}'_{ic})+\\&\boldsymbol{\Omega}\cdot\sum_i m_i(\boldsymbol{r}'_{ic}\boldsymbol{v}'_{ic}+\boldsymbol{v}'_{ic}\boldsymbol{r}'_{ic})-\\&\boldsymbol{\Omega}\cdot\sum_i m_i(\boldsymbol{v}'_{ic}\boldsymbol{r}'_{ic}-\boldsymbol{r}'_{ic}\boldsymbol{v}'_{ic})=\\&-\boldsymbol{\Omega}\cdot\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{I}_c-\boldsymbol{\Omega}\times(\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times\boldsymbol{v}'_{ic})=\\&-\boldsymbol{\Omega}\cdot\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{I}_c-\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{I}_c\cdot\omega'\end{aligned}$$

于是,角动量定理式(5)左边的总力矩为

$$\sum_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times\boldsymbol{F}_i-\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_c\cdot\boldsymbol{\Omega})-\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{I}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})$$

将其代入式(5),即得

$$\sum_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times\boldsymbol{F}_i=\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{I}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})]+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{I}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})\qquad(7)$$

对于$\boldsymbol{I}_c$中的$\boldsymbol{r}'_{ic}$利用$\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{B}$为固连于刚体的矢量),于是式(7)中的导数项等于

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{I}_c}{\mathrm{d}t}\cdot(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})+\boldsymbol{I}_c\cdot\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})=\\&\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{I}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})+\boldsymbol{I}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{\omega}'+\\&\boldsymbol{I}_c\cdot(\boldsymbol{\beta}'+\boldsymbol{\alpha})\end{aligned}$$

其中$\beta'=\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{\omega}'}{\mathrm{d}t}$为旋转系中测得的刚体角加速度.注意$\boldsymbol{I}_c$有两个矢量符号,其导数对应前两项.于是式(7)变为

$$\sum_i\boldsymbol{r}'_{ic}\times\boldsymbol{F}_i=(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{I}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})+\boldsymbol{I}_c\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\beta}'+\boldsymbol{\alpha})\qquad(8)$$

式(7)和(8)就是一般转动系中刚体对质心的角动量定理.式(4)和(8)就构成一般非惯性系中刚体动力学的完备方程组.

利用绝对导数和相对导数的关系

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}$$

可以发现式(7)和(8)其实就是惯性系中的下列两个结果[4]

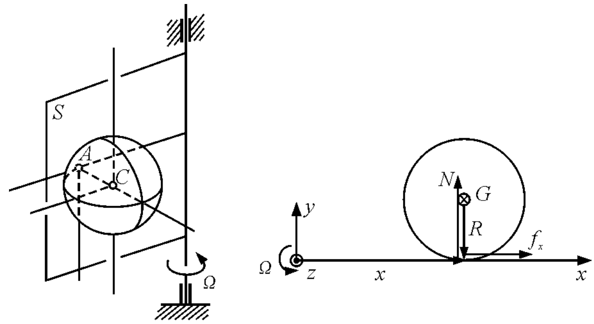
$$\begin{aligned}&\sum_i\boldsymbol{r}_{ic}\times\boldsymbol{F}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_c\cdot\boldsymbol{\omega})=\\&\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I}_c\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{I}_c\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\Omega})\end{aligned}$$

可见,我们的结果正确.此外,式(5)中各项惯性力

的效应,只有第一项的力矩为零,故而只有该项的合力通过质心,其他项的合力都不通过质心.

2　举例

兹举教材[3] 中一例. 一相当粗糙的平面绕平面内一竖直线以常角速度 Ω 转动. 一均匀圆球在重力作用下沿平面做纯滚动,初始时圆球相对平面无运动. 求证在以后的运动中球心永远不会低于它初始水平面以下 $\dfrac{5g}{\Omega^2}$ 的位置.



(a) 实物图　　(b) 俯视图

图 1　在旋转的竖直平面内滚动的球

依题意,$\boldsymbol{a}_0 = 0$,$\boldsymbol{\alpha} = 0$,$\boldsymbol{I}_c = kMR^2\boldsymbol{E}$(本题中 $k = \dfrac{2}{5}$). 取匀速旋转的平面为参考系(非惯性系),如图 1(b) 所示建立坐标系,其中 y 轴垂直于平面,z 轴沿转轴方向. 则 $\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{e}_y$. $\boldsymbol{R}$ 从球心指向平面,故

$$\boldsymbol{r}'_c = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{R} = x\boldsymbol{e}_x + z\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{R}$$

于是,质心运动定理式(4) 给出

$$\boldsymbol{N} + \boldsymbol{f} + \boldsymbol{G} + M\Omega^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}) - 2M\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}'_c = M\boldsymbol{a}'_c$$

即

$$f_x + M\Omega^2 x = M\ddot{x} \tag{9}$$

$$N + M\Omega^2 R - 2M\Omega\dot{x} = 0 \tag{10}$$

$$f_z - Mg = M\ddot{z} \tag{11}$$

对质心的角动量定理式(8) 给出

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{f} = kMR^2(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\beta}')$$

(注意此时 $\boldsymbol{I}_c$ 对称,式(8) 右边第一项为零),即

$$-f_z = kMR(-\Omega\omega'_y + \dot{\omega}'_x) \tag{12}$$

$$0 = \Omega\omega'_x + \dot{\omega}'_y \tag{13}$$

$$f_x = kMR\,\dot{\omega}'_z \tag{14}$$

无滑滚动条件给出

$$\boldsymbol{v}'_c + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{R} = 0$$

即

$$\dot{x} + \dot{\omega}'_z R = 0 \tag{15}$$

$$\dot{z} - \dot{\omega}'_x R = 0 \tag{16}$$

此外还需满足不等式 $N \geqslant 0$ 和 $|\boldsymbol{f}| \leqslant \mu N$.

由式(11)、(12)、(13) 和(16) 消 f_z,ω'_x,ω'_y,得

$$\ddot{z} + \frac{k\Omega^2}{1+k}\dot{z} = 0 \tag{17}$$

$$\begin{aligned} f_z &= m(g + \ddot{z}) \\ \omega'_x &= \frac{\dot{z}}{R} \\ \omega'_y &= \frac{1}{k\Omega R}[g + (1+k)\ddot{z}] \end{aligned} \tag{18}$$

式(17) 表明,$\dot{z}$ 做简谐振动. 据题意,$\dot{z}(0) = 0$,$\omega'_x(0) = \omega'_y(0) = 0$. 而由式(18),有

$$\ddot{z}(0) = -\frac{g}{1+k}$$

故由式(17) 和初始条件可以得到,$\dot{z}(t)$;再积分,即得

$$z - z(0) = -\frac{g}{k\Omega^2}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{1+k}}\Omega t\right) \tag{19}$$

把 $k = \dfrac{2}{5}$ 代入,命题得证. 由式(18) 可进而得到 f_z,ω'_x,ω'_y 随时间的关系.

但原题是有瑕疵的. 由式(9)、(14) 和(15) 消 f_x,ω'_z,得

$$\ddot{x} - \frac{\Omega^2}{1+k}x = 0 \tag{20}$$

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{k}{1+k}M\Omega^2 x \\ \omega'_z &= -\frac{\dot{x}}{R} \end{aligned} \tag{21}$$

式(20) 表明,小球离轴的距离 x 随时间指数增加. 由题意,$\dot{x}(0) = 0$,$\omega'_z(0) = 0$. 代入方程(10),得 $N(0) < 0$. 但 $N(0)$ 至少为零 0,因为 $N < 0$ 表示两物体相互拉扯而不是挤压. 另外,原题说平面相当粗糙,这要求 $\dfrac{|\boldsymbol{f}|}{N}$ 有界. 由式(21) 知 $|\boldsymbol{f}(0)| > 0$,这就要求 $N(0)$[或 $\dot{x}(0)$] 还要更大. 具体的讨论无关本文宏旨,从略.

参 考 文 献

1　周衍柏. 理论力学教程(第 3 版). 北京:高等教育出版社,2009. 183 ～ 188

2　杭庆平. 非惯性系中的质点组角动量定理. 大学物理,1988 (1) :16 ～ 19

3　朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学(下) . 北京:北京大学出版社,1982. 249 ～ 255,265

4　黄亦斌,曾建平,彭荣荣. 刚体转动方程的矢量式 —— 兼谈其与质点动力学的“内在统一性”. 物理通报,2017(7):17 ～ 19