竞 赛 与 物理专题研修

小球离开墙面问题探析

魏明逊
（昆明第三中学　云南 昆明　650500）
刘春生　杜雷鸣
（云南师范大学物理与电子信息学院　云南 昆明　650500）

（收稿日期：2017－08－19）

摘　要：在高中物理习题训练中，难免出现一些想当然的题目，由于缺乏对题目中适用条件的深入思考，会出现一些不切合实际的情况，本文针对高中物理常见的一道关于小球脱离墙面问题的习题进行了深入探析.

关键词：质心　角速度　脱离

1　提出问题

在很多参考书上都有这样一道习题：如图 1 所示，一个长直轻杆两端分别固定一个小球 A 和 B，两球质量均为 m，两球半径忽略不计，杆的长度为 l. 先将杆 AB 竖直靠放在竖直墙上，轻轻拨动小球 B，使小球 B 在水平面上由静止开始向右滑动，当小球 A 沿墙下滑距离为 $\frac{l}{2}$ 时，不计一切摩擦，下列说法正确的是

A. 杆对小球 A 做功为 $\frac{1}{4}mgL$

B. 小球 A 和 B 的速度都为 $\frac{1}{2}\sqrt{gl}$

C. A，B 的速度分别为 $\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$ 和 $\frac{1}{2}\sqrt{gl}$

D. 杆与小球 A 和 B 组成的系统机械能守恒

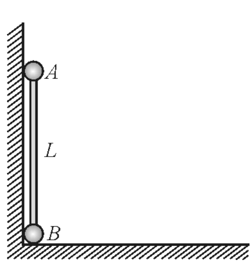

图 1　题图

解：当小球 A 沿墙下滑距离为 $\frac{l}{2}$ 时，设此时 A 球的速度为 v_A，B 球的速度为 v_B.

根据系统机械能守恒得

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2$$

由于杆不可伸缩，故两球沿杆子方向上的速度相等，则有

$$v_A\cos 60^\circ=v_B\cos 30^\circ$$

联立两式解得

$$v_A=\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

$$v_B=\frac{1}{2}\sqrt{gl}$$

对 A 球应用动能定理

$$W+mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}mv_A^2-0$$

得

$$W=-\frac{1}{8}mgl$$

故 C，D 正确.

得到题目的答案是很容易的，但深入思考后会发现问题：小球 A 一定可以沿墙下滑 $\frac{l}{2}$ 吗？即小球 A 在下滑 $\frac{l}{2}$ 前不会脱离墙面吗？

2　解决问题

解法一：利用质心运动定理，得到离开墙面的条

件就是 A,B 小球组成的系统的质心向右的加速度为零.建立如图 2 所示的坐标系,C 为系统的质心.

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$y_C = \frac{l}{2}\cos\theta$$

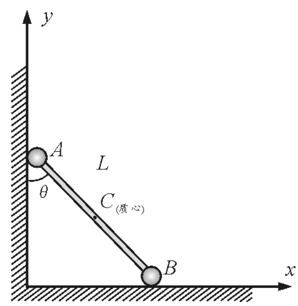

图 2　建立坐标系

对上式进行时间求导,当水平速度为最大值时,小球脱离墙面.

$$v_{Cx} = \frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2}\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{l\omega}{2}\cos\theta$$

$$v_{Cy} = \frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{l\omega}{2}\sin\theta$$

ω 为相对于 A 球的角速度即刚体的角速度,由于刚体相对自身任何一点的角速度都相等,因此 ω 也是 A,B 球相对系统质心的角速度.

根据机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = mgl(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

质心的位矢为

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{m\boldsymbol{r}_A + m\boldsymbol{r}_B}{2m} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B)$$

将上式中的 $\boldsymbol{r}_C$ 对时间求导.可得质心运动的速度为

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B)$$

把质心的速度分别向 x 轴和 y 轴投影,得

$$v_A = 2v_{Cy} \qquad v_B = 2v_{Cx} \qquad (2)$$

将式(2) 代入式(1) 得

$$\frac{1}{2}m4v_{Cy}^2 + \frac{1}{2}m4v_{Cx}^2 = mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{l^2\omega^2}{2} = gl(1-\cos\theta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta)}{l}} \qquad (3)$$

$$v_{Cx} = \frac{l}{2}\omega\cos\theta = \frac{l}{2}\cos\theta\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta)}{l}} = \sqrt{\frac{gl}{2}}\cos\theta\sqrt{1-\cos\theta}$$

如果脱离,v_{Cx} 存在极值即

$$\frac{\mathrm{d}v_{Cx}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{gl}{2}}\cos\theta\sqrt{1-\cos\theta}}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

可解得

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \qquad \theta = \arccos\frac{2}{3} = 48.2^\circ$$

解法二:根据机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = mgl(1-\cos\theta) \qquad (4)$$

A,B 小球沿杠方向投影的速度相等即

$$v_A\cos\theta = v_B\sin\theta \qquad (5)$$

代入式(4) 可得

$$v_B = \sqrt{2gl}\cos\theta\sqrt{1-\cos\theta} \qquad (6)$$

令

$$y^2 = \cos^2\theta(1-\cos\theta)$$

$$y^2 = \cos\theta\cos\theta(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta(2-2\cos\theta)$$

利用均值不等式

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \qquad \frac{(a+b+c)^3}{27} \geqslant abc$$

求解极值

$$\cos\theta\cos\theta(2-2\cos\theta) \leqslant \frac{(\cos\theta+\cos\theta+2-2\cos\theta)^3}{27} = \frac{8}{27} \qquad (7)$$

$$y^2 \leqslant \frac{4}{27} \qquad y_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \qquad (8)$$

因此当

$$\cos\theta = \cos\theta = 2-2\cos\theta$$

即

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \arccos\frac{2}{3} = 48.2^\circ$$

时小球脱离墙面.

解法二在高一物理相关章节的教学中学生利用已有的知识储备就可以求解.

从上面两种解法都可以看出：不可能出现题目中下滑$\frac{l}{2}$即$\theta=60^\circ$的情况，小球A下滑不到$\frac{l}{2}$就已经脱离墙面.

从以上探讨可以看出这道习题是不严密的. 沿这个思路，我们进一步探讨，如果小球质量不相等脱离角度如何变化？小球A下滑$\frac{l}{2}$不脱离的条件是什么？

3　深入探讨

3.1　当$m_A \neq m_B$，杆仍然为轻杆

解法一：

$$x_C=\frac{m_B}{m_A+m_B}l\sin\theta$$

$$y_C=\frac{m_A}{m_A+m_B}l\cos\theta$$

$$v_{Cx}=\frac{m_B}{m_A+m_B}\omega l\cos\theta$$

$$v_{Cy}=-\frac{m_A}{m_A+m_B}\omega l\sin\theta$$

令

$$A=\frac{m_A}{m_A+m_B}$$

$$B=\frac{m_B}{m_A+m_B}$$

根据机械能守恒

$$m_Agl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}(m_A+m_B)(v_{Cx}^2+v_{Cy}^2)+\frac{1}{2}(m_AB^2l^2+m_BA^2l^2)\omega^2$$

$$m_Agl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}l^2\omega^2[(m_B-m_A)\cos^2\theta+m_A]$$

$$\omega^2=\frac{2m_Ag(1-\cos\theta)}{l[(m_B-m_A)\cos^2\theta+m_A]}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2m_Ag}{l}\frac{(1-\cos\theta)}{(m_B-m_A)\cos^2\theta+m_A}}$$

$$v_{Cx}=\frac{m_B}{m_A+m_B}\sqrt{2m_Agl}\cos\theta\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{(m_B-m_A)\cos^2\theta+m_A}}$$

令$u=\cos\theta$

$$v_{Cx}=\frac{m_B}{m_A+m_B}\sqrt{2m_Agl}\,u\sqrt{\frac{1-u}{(m_B-m_A)u^2+m_A}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(u\sqrt{\frac{1-u}{(m_B-m_A)u^2+m_A}}\right)}{\mathrm{d}u}=0$$

$$\frac{(m_B-m_A)u^2(1-u)}{(m_B-m_A)u^2+m_A}=$$

$$1-\frac{3}{2}u\;\frac{1}{2}(m_B-m_A)u^3+\frac{3}{2}m_Au-m_A=0$$

$$\left(\frac{m_B}{m_A}-1\right)u^3+3u=2$$

$$\cos\theta=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{{m_A}^2}{(m_B-m_A)^2}+\frac{{m_A}^3}{(m_B-m_A)^3}}+\frac{m_A}{m_B-m_A}}+\sqrt[3]{-\sqrt{\frac{{m_A}^2}{(m_B-m_A)^2}+\frac{{m_A}^3}{(m_B-m_A)^3}}+\frac{m_A}{m_B-m_A}}$$

当$\theta=60^\circ$时，可求解得到$\frac{m_B}{m_A}=5$，即小球A下滑$\frac{l}{2}$刚好脱离墙面. 也就是如果要让上面的题目可以求解必须加入$\frac{m_B}{m_A}=5$这一限制条件.

当$\frac{m_B}{m_A}=10$时，脱离角度$\theta=64.6^\circ$，当$\frac{m_B}{m_A}=2$时，脱离角度$\theta=53.4^\circ$. $\frac{m_B}{m_A}$的比值越大，越不容易脱离.

解法二：换一种求解的方法让学生学会从不同的角度看问题.

$$\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2=m_Agl(1-\cos\theta) \tag{9}$$

如图 2 的几何约束为

$$y_A^2+x_B^2=l^2 \tag{10}$$

对式(10) 求导得

$$2v_Ay_A+2v_Bx_B=0$$

$$\tan\theta=\frac{x_B}{y_A}$$

令

$$n=\frac{m_B}{m_A}$$

代入式(9) 可得

$$v_B=\sqrt{2gl}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{n+\tan^2\theta}} \tag{11}$$

当水平速度v_B为最大值时，$\frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}\theta}=0$，小球脱离墙面.

n的限制条件与解法一所得的结论是相同的.

3.2　当 $m_A = m_B = m_{杆} = m$，杆的质量分布均匀

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$y_C = \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$v_{Cx} = \frac{l}{2}\omega\cos\theta$$

$$v_{Cy} = -\frac{l}{2}\omega\sin\theta$$

这个系统的动能包括质心的动能和绕质心的转动动能，下降过程质心的势能变化 $3m\Delta y_C$.

根据机械能守恒

$$\frac{1}{2}3m(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2) + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = 3mg\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \tag{12}$$

系统的转动惯量

$$I_C = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}ml^2 \tag{13}$$

将式(13)代入式(12)得

$$\frac{3}{2}m\left(\frac{l^2}{4}\omega^2\cos^2\theta + \frac{l^2}{4}\omega^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}\times\frac{7}{12}ml^2\omega^2 = 3mg\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

化简得到

$$\frac{2}{3}ml^2\omega^2 = 3mg\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9g}{4l}(1-\cos\theta)}$$

代入

$$v_{Cx} = \frac{l}{2}\omega\cos\theta$$

可得

$$v_{Cx} = \sqrt{\frac{9gl}{16}}\cos\theta\sqrt{1-\cos\theta} \tag{14}$$

令

$$u = \cos\theta$$

$$v_{Cx} = \sqrt{\frac{9gl}{16}}\,u\sqrt{1-u}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_{Cx}}{\mathrm{d}u} = 0$$

$$(1-u)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u\,(1-u)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$1 - u - \frac{1}{2}u = 0 \qquad u = \frac{2}{3}$$

即当 $\theta = \arccos\frac{2}{3}$ 时，球 A 脱离墙面.

3.3　当 $m_A = m_B = m$，$m_{杆} = m_1$，杆的质量分布均匀

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$y_C = \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$v_{Cx} = \frac{l}{2}\omega\cos\theta$$

$$v_{Cy} = -\frac{l}{2}\omega\sin\theta$$

根据机械能守恒

$$\frac{1}{2}(2m+m_1)\frac{l^2}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = (2m+m_1)g\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$I_C = \frac{1}{12}m_1l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\left(m + \frac{1}{3}m_1\right)l^2\omega^2 = (2m+m_1)gl(1-\cos\theta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2m+m_1}{m+\frac{1}{3}m_1}\,\frac{g}{l}}\sqrt{1-\cos\theta}$$

$$v_{Cx} = \sqrt{\frac{2m+m_1}{m+\frac{1}{3}m_1}gl}\cos\theta\sqrt{1-\cos\theta}$$

即当 $\theta = \arccos\frac{2}{3}$ 时，球 A 脱离墙面. 可以得出结论，当质心位置在杆的中心时，脱离的角度都是 $\theta = \arccos\frac{2}{3} = 48.2°$.

结论：命题过程由于考虑不够周全，使得球 A 在下降 $\frac{l}{2}$ 之前已经脱离墙面，要使得球 A 下降 $\frac{l}{2}$ 仍然具有可解性，需要加上 $\frac{m_B}{m_A} = 5$ 这一限制条件. 同时可以看出 $\frac{m_B}{m_A}$ 的比值对脱离角度的影响，并且可以看出只要质心不变脱离角度是不变的. 更多的讨论可以让学有余力的同学来完成.