

牛顿摆系统中的能量和动量传递^{*}

王成会 莫润阳 贺西平 边小兵 陈 时

(陕西师范大学物理学与信息技术学院 陕西 西安 710062)

(收稿日期:2017-08-23)

摘要:将牛顿摆简化为球链并看作弹簧-质量系统,基于无量纲动力学方程组对球链上小球的运动特征进行数值分析.结果表明,入射球速度、球材料特性以及球半径等因素均影响球链上的动量和能量传递效率.

关键词:牛顿摆 弹簧-质量模型 动量和能量传递

1 引言

中学和大学物理教学中通常应用牛顿摆装置^[1](图1)来演示并验证碰撞过程中动量和能量守恒,在生活中也常有类似的桌球游戏、玩具等^[1,2],它们的共同特征是有多个彼此独立且彼此接触的 m 个同质等大的球构成的球链,在此球链上,可实现有效的能量和动量传递并表现出许多有趣的现象,比如,移动球链上 $n(n < m)$ 个小球,让其以同样速度沿着连心线撞击静止球链的一端,球链另一端 n 个小球会被弹出.在图1所示的牛顿摆装置中,左右两侧小球交替运动,在阻尼很小的情形下,这个过程可持续很长时间.这个现象从被发现以来,就引起了人们极大的研究兴趣,人们利用不同的材料构造牛顿摆装置,发展不同的理论研究模型,从实验、理论以及数值模拟等角度研究摆球运动过程中运动状态变化规律^[3~8].

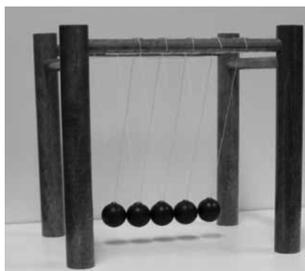


图1 牛顿摆装置

多球链牛顿摆并不符合直观的碰撞规律,即不能把“不活跃”小球^[1]看作整体应用动量守恒定律,为更好地解释物理现象,许多学者提出连续碰撞模

型解释牛顿摆球链上的动量传递规律^[1,4],他们认为各小球之间有很小的缝隙,因此,球链上的动量和能量传递过程中符合两两之间的系列碰撞规律.连续碰撞模型预测球链上“不活跃”小球将处于静止状态,但是牛顿摆运动的高速摄影实验结果表明,球链上的“不活跃”小球在碰撞结束后也获得了很小的运动速度,因此,连续碰撞模型并不能完美地解释实验观察到的物理现象.更完善的模型是将球链上的小球抽象为质点和弹簧系统^[5~9],如图2所示,从而摆球碰撞球链在球链上引起的动量和能量传输可通过质量和弹簧之间的能量转换和转移实现.本文将基于牛顿摆球链质量-弹簧模型分析研究牛顿摆系统的动量和能量传递的影响因素.



图2 质量-弹簧模型

2 理论模型

2.1 牛顿摆模型方程

将牛顿摆简化为多个半径同为 R 的匀质球构成的球链,置于光滑水平面上,球心在同一直线上;初始时刻除碰撞小球具有初速度 v_0 外,其他小球均处于静止状态且彼此间距为 $2R$;若忽略摆球与其他静止球碰撞过程中的能量损失,则可将每个小球看做是理想质点与劲度系数 κ 组成的系统.为简化分析,本文将对由3个小球构成的牛顿摆进行动力学分析.若以小球1恰好接触小球2的时刻为计时起点,

^{*} 国家自然科学基金资助,项目编号:11474191;陕西师范大学教学改革项目资助.

作者简介:王成会(1974-),女,博士,副教授,硕士生导师,主要从事力学和理论力学教学研究工作.

此时小球1的中心位置为坐标原点,各小球连心线为坐标轴的坐标系中,系统动力学方程可表示为^[5~8]

$$m\ddot{x}_1 + \kappa(x_1 - x_2 + 2R)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 - \kappa(x_1 - x_2 + 2R)^{\frac{3}{2}} + \kappa(x_2 - x_3 + 2R)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{x}_3 - \kappa(x_2 - x_3 + 2R)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (3)$$

式中 x_1, x_2 和 x_3 为碰撞小球的位置坐标, m 为小球质量, 劲度系数 κ 是与物质材料特性相关的物理量, 其表达式为^[5]

$$\kappa = \frac{E\sqrt{2R}}{3(1-\sigma^2)} \quad (4)$$

其中 E 是杨氏模量, σ 是材料泊松比. 设 $\tau = \omega t$, 其中

$$\omega = \sqrt{\frac{2ER}{3m(1-\sigma^2)}}$$

无量纲动力学方程为

$$\frac{d^2\bar{x}_1}{d\tau^2} + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2\bar{x}_2}{d\tau^2} - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + 1)^{\frac{3}{2}} + (\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + 1)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^2\bar{x}_3}{d\tau^2} - (\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + 1)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (7)$$

式中 $\bar{x}_i = \frac{x_i}{2R}$, ($i=1, 2, 3$).

给定初始条件, 可对式(5)~式(7)进行数值分析, 得到各小球在相互作用过程中的位置变化、速度变化以及加速度变化特征. 根据模型假设, 当分析小球1撞击相邻小球2和小球3时, 各小球的初始无量纲位置坐标分别为 $\bar{x}_1=0, \bar{x}_2=1, \bar{x}_3=2$, 小球2和3的初始无量纲速度为零, 小球1的初始无量纲速度 \bar{v}_{10} 可调节. 对给定的 \bar{v}_{10} , 基于式(5)~(7)以及初始条件可进行数值分析, 研究不同 \bar{v}_{10} 作用下牛顿摆系统的能量传输以及动量传输特征.

2.2 牛顿摆球碰撞引起的能量和动量传递特征

设一次撞击结束后各小球的无量纲速度分别为 \bar{v}_1, \bar{v}_2 和 \bar{v}_3 , 则各球的动量变化分别为

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= 2m\omega R(\bar{v}_1 - \bar{v}_{10}) \\ \Delta p_2 &= 2m\omega R\bar{v}_2 \\ \Delta p_3 &= 2m\omega R\bar{v}_3 \end{aligned} \quad (8)$$

能量变化分别为

$$\begin{aligned} \Delta E_{k1} &= \frac{m}{2} (2\omega R)^2 (\bar{v}_{10}^2 - \bar{v}_1^2) \\ \Delta E_{k2} &= \frac{m}{2} (2\omega R)^2 \bar{v}_2^2 \end{aligned} \quad (9)$$

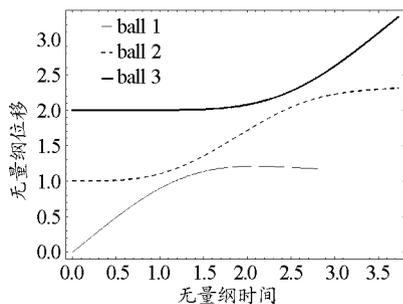
$$\Delta E_{k3} = \frac{m}{2} (2\omega R)^2 \bar{v}_3^2$$

能量和动量传输的效率与小球之间的相互作用时间有关, 通常情况下, 对刚度较大的球链而言, 入射小球1的速度越大, 小球之间的相互作用越强, 能量和动量在球链上传递的效率越高.

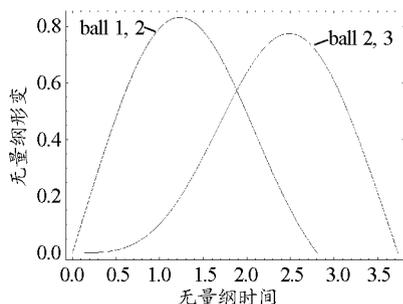
3 牛顿摆运动影响因素

3.1 碰撞过程特征

为更好地了解碰撞过程中球链上小球的作用特征, 基于无量纲动力学方程组式(5)~(7)进行数值分析. 图3给出了选取 $\bar{v}_{10}=1$ 时球链上各球心位移随时间变化关系, 结果表明, 对小球1以较高速度撞击球2和球3构成的球链, 彼此间将发生很强的相互作用, 在 $\tau=1.3$ 附近小球1和2之间无量纲距离接近0.2, 在 $\tau=2.6$ 附近小球2和3之间无量纲距离接近0.3, 此种情形下球链上各球将发生较大的形变, 以实现彼此间动量和能量的传递.



(a) 球链上各球碰撞过程的位置变化



(b) 球1, 2之间的形变以及球2, 3之间的形变随时间演变关系图

图3 小球位置变化和间距变化特征

在实际的牛顿摆实验中, 通常采用刚度很大的小球形成演示实验系统, 球很难发生如此大的形变以完成动量和能量在球链上的理想传递, 但是, 取单

位1无量纲速度分析的结果同样具有典型意义. 为比较不同初始无量纲速度对牛顿摆型球链上能量和动量传递的影响, 我们还分析了 $\bar{v}_{10} = 0.1, 0.01$ 和 0.001 时各球的速度变化以及完成一次单向能量和动量传递所需的相互作用时间, 如图4所示.

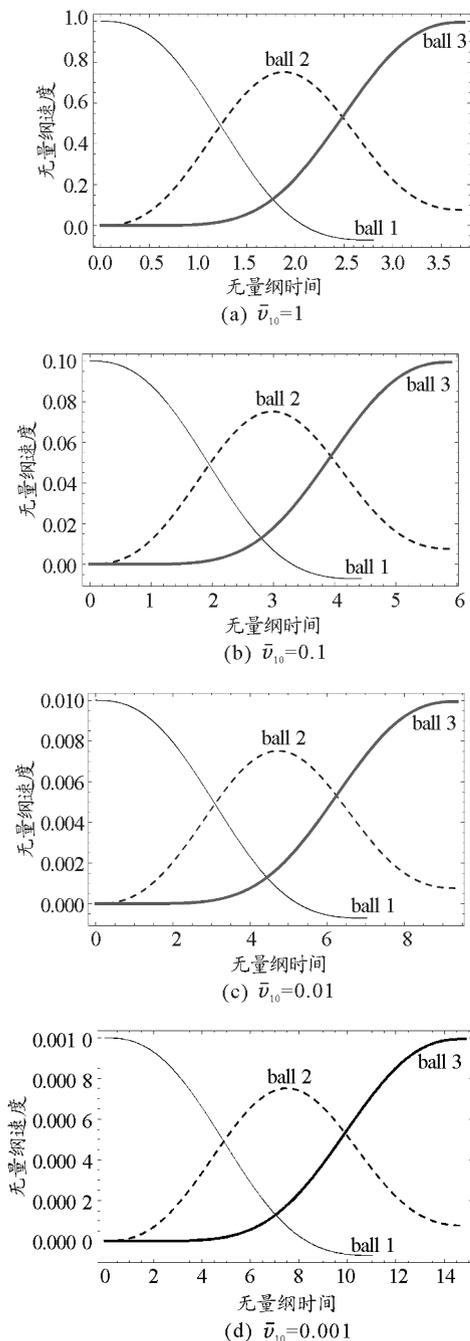


图4 速度变化特征

通过对比发现, 随着撞击小球1速度的减小, 彼此间相互作用时间延长, 可近似将整个作用时间等分为3个阶段: 第一阶段主要表现为小球1和小球2碰撞, 二者之间发生动量和能量交换; 第二阶段为混合作用区, 球链上3小球之间均表现为较强相互作用,

动量和能量实现从小球1到小球3的传递, 第二阶段末, 小球1与小球2之间的相互作用结束; 第三阶段仅表现为小球2与小球3之间的相互作用, 在此阶段末, 小球3几乎获得了初始时刻小球1的速度. 在此过程中, 能量和动量始终守恒. 通过比较图4(a)~图4(d)的速度变化特征发现, 无论初始时刻小球1的速度如何, 在理想情形下, 小球3的末速度约为 $0.993v_{10}$, 小球1与小球2作用结束时小球1末速度约为 $-0.071v_{10}$, 而小球2与小球3作用结束时小球3末速度约为 $0.076v_{10}$.

3.2 碰撞过程中能量和动量传递

在球链模型中, 动量和能量的时间变化率分别为

$$\frac{dp}{dt} = \frac{4R^2 E}{3(1-\sigma^2)} \frac{d\bar{v}}{d\tau} \quad (10)$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{8R^2 E^{\frac{3}{2}}}{3(1-\sigma^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi\rho}} \bar{v} \frac{d\bar{v}}{d\tau} \quad (11)$$

式中 ρ 为小球密度. 由无量纲动力学分析结果知, 小球1的初速度影响 $\frac{d\bar{v}}{d\tau}$ 以及完成能量和动量传递所需时间. 式(10)和式(11)表明, 动量和能量传递的效率均受到小球1的初速度、球半径大小以及球材料物理特性的影响. 在同样的无量纲初速度传输球链上, 杨氏模量以及球半径越大, 动量和能量传输效率越高, 而密度越大, 能量的传输效率越低. 因此, 古时用于牛顿摆碰撞演示实验的小球材料通常选用象牙或钢等^[2].

3.3 阻尼影响

通过数值分析发现, 忽略阻尼对牛顿摆各小球相互作用影响的情形下小球1和2末速度均不为零, 且相对于其 $t=0$ 时刻的初始位置发生了小幅偏移, 这势必增加牛顿摆工作过程的不稳定性, 正如我们在演示实验中观察到的那样, 摆球的幅度越来越低, 其他各小球的运动也越来越明显. 各小球相互作用的动力学系统是非线性的, 不仅如此, 碰撞结束后的摆球运动也是非线性的, 非线性运动过程对初值非常敏感, 初值极小的变化就可能引起较大系统非线性响应, 因此, 要想观察到稳定的牛顿摆现象, 需充分考虑各种影响因素的作用, 以实现更好地控制. 文献[7]等引入恢复系数分析碰撞过程中的能量耗散, 文献[5]根据非弹性碰撞特征在动力学方程中

引入粘弹性力因子,其形式为

$$F_{\text{diss}} = -\gamma \frac{d}{dt} (2R - x_{i+1} + x_i)^\beta \quad (12)$$

式中 $\beta = \frac{3}{2}$ (Hertz - kuwabara - Kono 模型), γ 为阻尼系数.

4 结论

作为物理演示实验,牛顿摆装置的研究具有重要的科学意义,准确而通俗易懂的解释有助于提升学生学习兴趣,培养学生的科学素养.不仅如此,牛顿摆模型的经典理论研究方法及其研究结论还拓展到了现代科学领域^[10,11],为分析链式结构的粒子之间的相互作用提供了理论基础.本文基于三体链式球作用系统分析牛顿摆模型中动量和能量传递特征,通过无量纲动力学方程的数值分析发现,对链式球系统,无论入射摆球的初速度如何,整个单向碰撞过程结束后各球末速度和入射摆球的初速度比值趋于定值;但是入射摆球的初速度大小影响链式球系统的相互作用时间,入射速度越大,作用时间越短,动量和能量传递的效率越高.链式球系统的能量和能量传递快慢受到球的大小和材料等因素的影响,通常情况下,阻尼的影响因素也不能忽略.

参考文献

- 1 D. Kagan. Happy Balls, Unhappy Balls, and Newton's Cradle. *Physics Teacher*, 2010, 48(3): 152
- 2 J. D. Gavenda, J. R. Edgington. Newton's cradle and

- scientific explanation. *Physics Teacher*, 1997, 35(7): 411 ~ 417
- 3 C. M. Donahue, C. M. Hrenya, A. P. Zelinskaya, et al. Newton's cradle undone: Experiments and collision models for the normal collision of three solid spheres. *Physics of Fluids* 2008, 20(11): 113301
- 4 E. J. Hinch, S. Saint - Jean. The fragmentation of a line of balls by an impact. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1999, 455: 3201 ~ 3220
- 5 S. Hutzler, G. delaney, D. Weaire, et al. Rocking Newton's cradle. *American Journal of Physics*, 2004, 72(12): 1508 ~ 1516
- 6 Herrmann F, Schmalzle P. Simple explanation of a well - known collision experiment. *American Journal of Physics*, 1981, 49(8): 761 ~ 764
- 7 V. Ceanga, Y. Hurmuzlu. A new look at an old problem: Newton's cradle. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, 68(4): 575 ~ 584
- 8 V. F. Nesterenko, E. B. Herbold. Periodic waves in a Hertzian chain. *Physics Procedia*, 2010, 3: 457 ~ 463
- 9 靳晓庆, 张振亚, 段忠, 等. 球链中冲击扰动的传播. *力学与实践*, 2014, 36(5): 611 ~ 616
- 10 S. Wüster, C. Ates, A. Eisfeld, et al. Newton's Cradle and Entanglement Transport in a Flexible Rydberg Chain. *Physical Review Letters*, 2010, 105: 053004.
- 11 K. Sekimoto. Newton's cradle versus non - binary collisions. *Physical Review Letters*, 2010, 104: 124302

Transmission of Momentum and Energy in the System of Newton's Cradle

Wang Chenghui Mo Runyang He Xiping Bian Xiaobing Chen Shi

(School of Physics & Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710062)

Abstract: Simplified the Newton's Cradle to ball - chain and considered the balls as a model of mass - and - spring, the motions of the balls are analyzed numerically by use of the non - dimensional equations. The results show that many factors affect the efficiency of the transmission of the momentum and energy in the ball chain of Newton's cradle, such as inclined velocity, the property of the material and the size of the balls.

Key words: Newton's cradle; mass - and spring model; transmission of momentum and energy