

# 盛水玻璃杯共振频率的研究\*

戴诗琪 林美好 邓欣 黄敏

(四川省成都市新都一中铭章学院 四川 成都 610500)

赵芸赫

(北京师范大学物理学系 北京 100875)

(收稿日期:2017-09-03)

**摘要:**对圆柱形玻璃杯模式数为2的低阶振动进行了模型建构及定量分析,给出了共振频率的定量表达式,并得到了未盛水的圆柱形玻璃杯的共振频率正比于圆柱的壁厚度、反比于圆柱的横截面积;当加入少量水时候,杯子的发声频率与空杯大体一致;水较满时,发声频率随着空腔体积的增大而线性增大等结论.最后通过定量实验对该理论进行了验证.

**关键词:**玻璃杯 共振频率 FFT变换

酒杯一部分盛满液体,暴露于扬声器的声音下会产生共振.这个问题来源于2017年IYPT(国际青年物理学家锦标赛)的赛题,也是中学物理中用来演示共振的经典现象.而对于其共振频率的定量求解与实验验证却寥寥无几,因此,本文针对圆柱形玻璃杯容器及其盛水时的共振情况进行了模型建构,得到了空杯共振频率的定量表达式并用实验验证了理论的正确性.

对于A. P. French在文献<sup>[1]</sup>中给出的半满玻璃杯的公式,本文进行了空杯极限和满杯极限的解析分析,发现在盛水量较少时其频率与空杯频率接近,盛水量较多时其频率随着加水体积的增大而线性减小;对于同一玻璃杯,内盛液体密度越大,其共振频率越小.这些结论在本文的实验中也得到了验证.

## 1 模型建立

### 1.1 圆柱形玻璃杯振动模型

为简化问题,考虑一个密度为 $\rho$ 圆柱形玻璃杯在平衡位置模式数为 $n=2$ 的低阶振动.取半径为 $R$ ,厚度为 $\tau$ ,高度为 $w$ 的一段柱元,则圆柱上一段微元 $dm = \rho 2\pi R \tau w$ 的振动方程为

$$dm\ddot{r} = -\kappa r \quad (1)$$

$\kappa$ 为微元的劲度系数,而根据文献<sup>[1~3]</sup>,我们知道如图1所示的环形圈在形变时的劲度系数为

$$\kappa = \frac{\alpha Y w \tau^3}{R^3} \quad (2)$$

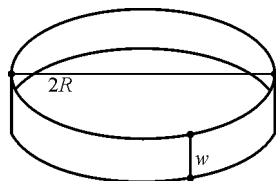


图1 环形圈示意图

其中, $\alpha \approx 0.56$ , $Y$ 是圆柱的杨氏模量.则振动方程可化为

$$\ddot{r} = -\left(\frac{\alpha Y \tau^2}{2\pi \rho R^4}\right) r \quad (3)$$

则 $r = r_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ,即圆柱横截面做简谐振动.易得

$$\omega = 2\pi \sqrt{\frac{\kappa}{dm}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{\alpha Y w \tau^3}{R^3}}{\rho 2\pi R \tau w}} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha Y}{\rho 2\pi}} \frac{\tau}{R^2} \quad (4)$$

于是有 $f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{\alpha Y}{\rho 2\pi}} \frac{\tau}{R^2}$ .这说明,圆柱体共

\* 国家社会科学基础“十三五”规划2016年度教育学一般课题“普通高中学术性拔尖创新人才培养的实验研究”,课题编号:BHA160158

作者简介:戴诗琪(2001-),女,2016级高中生在读.

通讯作者:赵芸赫(1993-),女,北京师范大学硕士研究生在读,研究方向:物理课程与教学论.

振频率正比于圆柱的壁厚度,反比于圆柱的横截面积,实验上可以验证这一点.

### 1.2 圆柱形盛水玻璃杯振动模型

根据 A. P. French 在文献<sup>[1]</sup>中给出的半满玻璃杯的公式

$$f_h \approx \frac{f_0}{\sqrt{1 + \frac{\beta \rho_0 R}{5 \rho \tau} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^4}} \quad (5)$$

其中,  $f_0$  为空杯频率,  $\beta = \frac{3}{2}$  为一常数,  $\rho_0$  为液体密度,  $H$  为玻璃杯高度,  $h$  为杯中液面至杯口距离. 在本研究中,玻璃杯能近似看作圆柱体时,应有

$$1 - \frac{h}{H} = 1 - \frac{V_e}{V_0} = \frac{V_l}{V_0} \quad (6)$$

其中  $V_l$  为液体体积,同时令  $\mu = \frac{\beta \rho_0 R}{5 \rho \tau}$ , 因此,式

(5) 可化为

$$f_h \approx \frac{f_0}{\sqrt{1 + \mu \left(1 - \frac{V_e}{V_0}\right)^4}} = \frac{f_0}{\sqrt{1 + \mu \left(\frac{V_l}{V_0}\right)^4}} \quad (7)$$

#### 1.2.1 特殊情形讨论

当液体体积较少时,  $\frac{V_l}{V_0} \ll 1$ , 因此有  $f_h \approx f_0$ , 这说明当加入少量水时候,杯子的发声频率与空杯大体一致;而当空腔体积较少时,  $\frac{V_l}{V_0} \leq 1$ , 即酒杯接近满时有

$$\left(1 - \frac{V_e}{V_0}\right)^4 \approx 1 - 4 \frac{V_e}{V_0} \quad (8)$$

因此式(5)可化为

$$f_h \approx \frac{f_0}{\sqrt{1 + \mu \left(1 - 4 \frac{V_e}{V_0}\right)}} \approx \frac{f_0}{\sqrt{1 + \mu}} + \frac{2\mu f_0}{(1 + \mu)^{\frac{3}{2}} V_0} V_e \quad (10)$$

上式表明,当空腔体积较小,即水较满时,发声频率是随着空腔体积的增大而线性增大的,或者随着水的增加而线性减小的.

## 2 实验验证

为了验证上述理论的正确性,本研究利用柱形玻璃杯和高脚杯等玻璃杯进行了盛水时和未盛水时两种情形下的共振实验. 实验中采用的 6 个玻璃杯

的参数如表 1 所示.

表 1 玻璃杯相关参数

玻璃杯编号	1	2	3	4	5	6
杯口壁厚/mm	3.380	2.727	1.578	1.859	2.028	1.249
杯口外直径/cm	5.87	5.51	4.85	5.80	5.85	4.87
容积/mL	270	190	150	170	170	230

其中 1, 2, 6 号杯形状可以近似为一圆柱, 3 号杯为一香槟杯底端拐角部分较短上部可视为一圆柱面, 4, 5 号杯为高脚红酒包络面类似一抛物面.

实验中我们通过敲击玻璃杯壁让其自由振动并用拾音器收集音频数据,接着用 FFT(傅立叶变换)声音数据变换到频域空间找到主频,最终在 Matlab 中绘图对比理论和实验结果,例如经过 FFT 变换得到的其中一个频谱如图 2 所示.

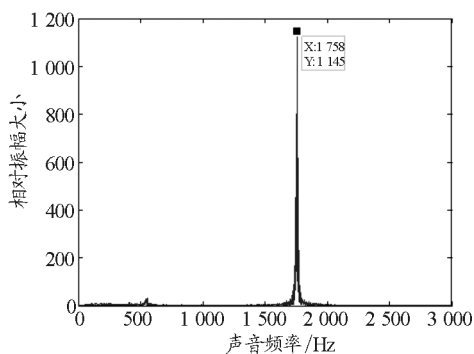


图 2 4 号杯空杯发声频谱图

由图 2 可以看出,玻璃杯的频谱具有明显的共振频谱特征,在 4 号杯不加水时可以得到其共振频率为 1758 Hz. 对于其他实验用玻璃杯在加水不同情况下得到的数据均按照该方法分析,故不在此一一列出.

### 2.1 空杯共振实验

实验采用了 6 种不同型号的玻璃杯,当玻璃杯内未盛水时,敲击玻璃杯壁,收集音频,通过数据处理找到共振频率,并绘制空杯共振频率实验与理论符合结果,如图 3 所示.

从图 3 中可以看出,实验与理论基本吻合,其中,编号为 1, 2, 6 的玻璃杯为圆柱形玻璃杯或接近圆柱形玻璃杯,编号为 3, 4, 5 的玻璃杯为高脚杯,可以看到,1, 2, 6 号空杯共振频率的理论预测值与实验测定值符合很好,3, 4, 5 号空杯共振频率的理论

预测值与实验测定值之间有一定偏差,但误差较小,说明该理论可以很好地解释圆柱形玻璃杯的共振现象,对于非圆柱形玻璃杯,如高脚杯状的玻璃杯的共振现象,也可从半定量角度予以解释,定量结果误差较小,验证了理论的可行性。

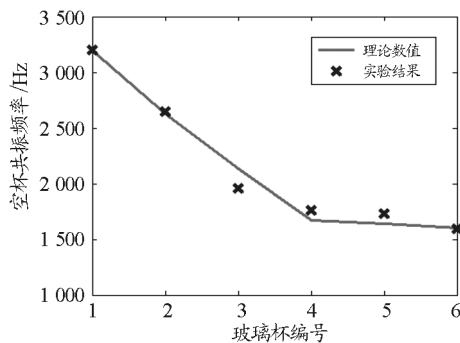


图3 6种玻璃杯未盛水时共振频率理论与实验符合结果

## 2.2 盛水玻璃杯的共振实验

接着利用这6种玻璃杯继续探究了共振频率与水位高低之间的关系,特别地,对于圆柱形玻璃杯,液体高度与玻璃杯高度之比和液体体积与玻璃杯体积之比相等.实验中水位高低是通过量筒控制加入水体积来实现的,6只玻璃杯的实验结果如图4所示。

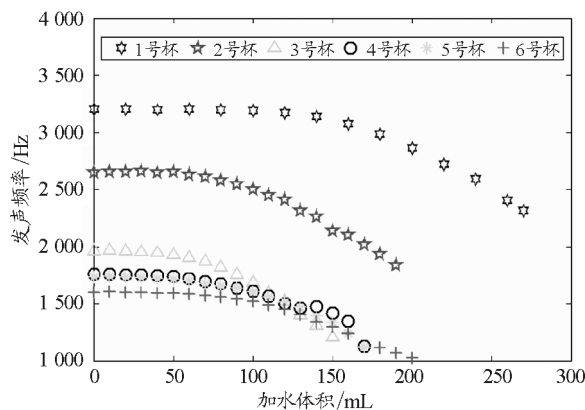


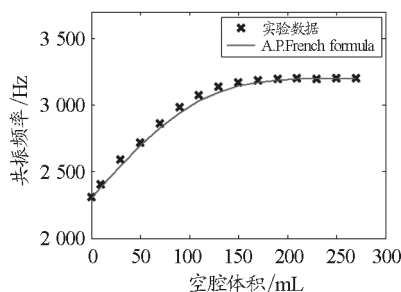
图4 不同玻璃杯共振频率与水位高低的关系

由图4可以看出,在加水体积达到一定值后,其发声频率与空腔体积近似成一线性关系;在加水体积达到一定值前,其发声频率趋于一定值;同时,图像的斜率符合上述理论分析,即当加入少量水的时候,杯子的发声频率与空杯大体一致;当水较满时,发声频率是随着水的增加而线性减小的。

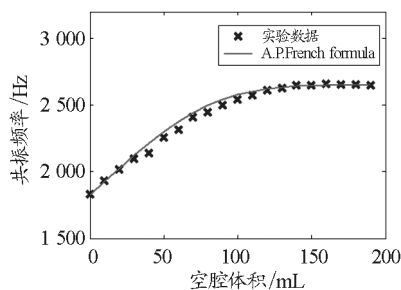
其中4号杯、5号杯为同一批次同款玻璃杯,从

图中可以看出频率随着加水量变化的曲线几乎重合,除了4号杯有3个点的频率在加水体积150 ml附近处突然增高,可以认为这是由于该玻璃杯在那一水位附近的厚度出现了较大变化所致,故在后文中的理论实验对比部分,我们采用5号杯的数据。

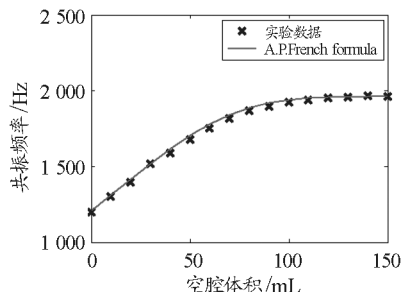
各玻璃杯加水频率的实验结果与理论模拟结果相匹配的结果如图5所示。



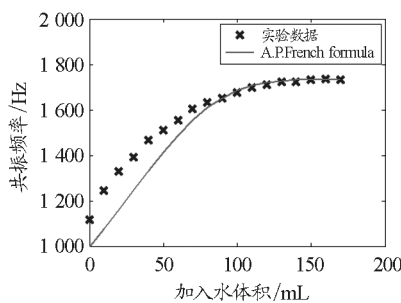
(a) 1号杯



(b) 2号杯



(c) 3号杯



(d) 5号杯

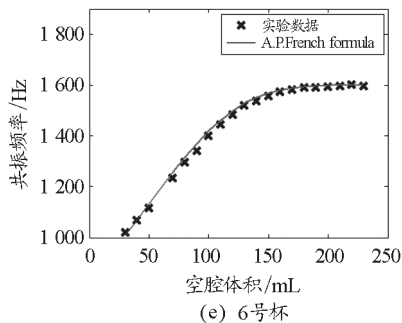


图5 不同玻璃杯共振频率与水位高低关系的理论与实验比对照图

由图5可以看出,对于1,2,6号杯而言,由于其外形可视为圆柱,故盛不同水量时的共振频率的实验测定值与理论值符合很好,而5号高脚杯的相应实验结果在水量多时与理论有一定偏差,在水量较少时与理论符合较好,几乎等于空杯频率.而3号香槟杯的曲线虽然底部有一定拐角,但是拐角范围很小,而这一范围内加水频率几乎为空杯频率,随着水量的增加,其形状可以视为圆柱,故实验结果与理论也符合很好.

### 2.3 盛不同密度溶液的玻璃杯的共振实验

利用3号杯盛不同密度液体进行玻璃杯的共振实验,其中不同密度的溶液是利用氯化钠配置的密度分别为 $1.1 \text{ g/cm}^3$ ,  $1.2 \text{ g/cm}^3$ ,  $1.3 \text{ g/cm}^3$ 的溶液.实验结果如图6所示.盛有不同密度溶液的玻璃杯的共振频率随空腔体积变化的规律与理论预测曲线相符,对于同一玻璃杯,内盛溶液密度越大,其共振频率越小,与式(5)预测的趋势相符.

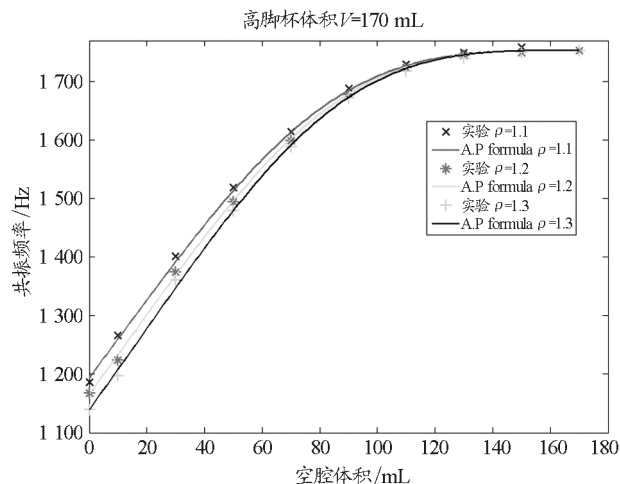


图6 盛有不同密度的氯化钠溶液的玻璃杯的共振频率随空腔体积的变化曲线

通过上述实验我们发现,本研究的理论可以较好地计算空玻璃杯的固有频率.对于盛水的圆柱形玻璃杯的频率,A. P. French在文献<sup>[1]</sup>中给出的公式可以较好地描述;对于非圆柱形玻璃杯,这一公式在水量较多时误差较大.

除此之外,由于不同的玻璃杯的自身参数不同,即会影响其固有频率,进而导致共振频率不同,会造成一定的实验误差.

### 3 结论

本文分别从理论和实验两个角度对玻璃杯共振现象进行了问题求解,给出了圆柱形玻璃杯未盛水时及盛水时模式数为2的振动情形下的共振频率的定量表达式,并得到如下结论:

(1) 未盛水的圆柱形玻璃杯的共振频率正比于圆柱的壁厚度;

(2) 未盛水的圆柱形玻璃杯的共振频率反比于圆柱的横截面积;

(3) 当加入少量水的时候,杯子的发声频率与空杯大体一致;

(4) 当空腔体积较小,即水较满时,发声频率随着空腔体积的增大而线性增大的,或者随着水的增加而线性减小.

最后对6种不同型号的玻璃杯在不同情形下(如注水体积等)进行了共振频率的测定,然后利用同一玻璃杯盛不同密度的氯化钠溶液进行了玻璃杯的共振实验.其中玻璃杯的共振频率随空腔体积变化的规律与理论预测曲线相符,对于同一玻璃杯,内盛溶液密度越大,其共振频率越小,与理论预测趋势相符,即通过定量实验验证了理论的正确性.

### 参考文献

- 1 A. P French. In *Vino Veritas - A study of wineglass acoustics*. *Am. J. Phys.*, 1983, 51(8)
- 2 Eunjin Yang, Ho - Young Kim. *Jumping hoops*. *American Journal of Physics*, 2012, 80: 1
- 3 A. E. H. Love, M. A. D. Sc. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Second Edition. The University Press, 1906. 267 ~ 268
- 4 马宇翰, 马欣然, 李融武, 等. 弹性箍弹起最大高度的研究. *大学物理*, 2015(01): 57 ~ 61

(下转第56页)

演示:开关打到1的瞬间,灯泡亮一下;开关打到2的瞬间,灯泡又亮一下,快速地反复地将开关在1,2间切换,可看到灯泡持续闪亮。

结论:电容器“通电”的实质就是电容器不断地充、放电。

## 2 实验分析

“实验一”中教师可以向学生说明,此处的电容起了滤除杂音的作用。教师还可以向学生演示,若换接一只大电容,就会发现滤除杂音的效果不佳。不需教师发问,此时学生的脑海中就必然存在若干个为什么。此实验操作简单,效果明显,极大地刺激了学生的感官,调动了学生的积极性,激发了他们学习的兴趣和求知欲。兴趣是学生学习自觉性和积极性的核心因素,是学习的强化剂。只有当一名学生对所学的课程发生了兴趣时,才会积极主动地进行学习,才会愿意更深层次地思考,从浅层的学习进入更深层次的学习。

“实验二”和“实验三”既可以作为演示实验,也可以作为学生的探究实验,以学生为主体,让学生通过体验、观察、讨论、猜想、探究等方式理解决定感抗和容抗大小的因素,使学生经历一个完整的知识构建的过程。整个过程中,物理概念和规律在学生的头脑中会很自然地建立,教师无需用更多的语言来解

释。这样的实验不仅能激发学生学习物理的主观能动性,拓宽他们的视野,丰富他们的想象,让他们真切地感受到物理的神秘,而且能有效地提高学生的观察能力、分析问题和解决问题的能力。

“实验四”电路设计很简单,却将电容器充、放电这一抽象内容可视化地展现出来,使学生通过直观形象获得感知,推进了探究活动,帮助学生顺利完成知识的自主建构。有条件的学校也可以用电流传感器记录这一过程,通过  $i-t$  图像直观地观察到电容器充放电时电流随时间的变化情况。

物理学是一门实验科学,实验教学应摒弃功利化,切忌纸上谈兵,教师要意识到实验在培养学生兴趣和可持续发展能力等方面的重大作用。本节课所设计的实验简明、直观、效果明显,且易于取材制作。上课的过程中学生主动参与、思考积极、气氛活跃,在教师的引导下,通过对实验现象的对比、分析、归纳和总结,让学生深切地感受到了学习的乐趣,收获的快乐和成功的愉悦。

## 参考文献

- 1 王少东.“电感和电容对交变电流的影响”演示实验的创新. 实验教学与仪器,2016(3):13~14
- 2 冀林,周颖洁.巧设实验,提升思维,促进运用——浅析“电感和电容对交变电流的影响”实验设计. 物理教师,2014(8):50~51

(上接第49页)

# Study on Resonant Frequency of a Glass Filled with Water

Dai Shiqi Lin Meiyu Deng Xin Huang Min

(Mingzhang Institution of Xindu No. 1 High School, Chengdu, Sichuan 610500)

Zhao Yunhe

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

**Abstract:** In this paper, the low-order vibration of a cylindrical glass in its mode number 2 is modeled and quantitatively analyzed. The quantitative expression of resonant frequency is given, and the resonant frequency of the cylindrical glass is proportional to the thickness of the cylinder and inversely proportional to the cross-sectional area of the cylinder. When adding a small amount of water, the sound frequency of the cup is roughly the same as that of the empty cup. When the water is full, the sound frequency increases linearly with the increase of the cavity volume. Finally, the theory is validated by quantitative experiments.

**Key words:** glass; resonant frequency; FFT transform