“近似法”在简谐运动中的应用

彭爱国　彭宇琪

（武汉市第三中学　湖北 武汉　430050）

（收稿日期：2017－10－12）

摘　要：将高中物理竞赛中经常应用的“近似法”进行了分类，归纳为代数近似法和几何近似法，并用这两种方法对第 34 届全国中学生物理竞赛预赛的压轴题进行了分析.

关键词：小量近似　代数近似　几何近似

在高中物理竞赛中经常出现要近似处理的试题，特别是在证明简谐运动中经常出现.由于很多学生不熟悉“代数近似”的公式，不能灵活应用“小量近似”，从而不能突破问题的瓶颈，致使问题无法正确求解.近似处理通常有代数近似和几何近似这两种方法，本文以第 34 届全国中学生物理竞赛预赛第 16 题为例谈谈代数近似法和几何近似法在具体问题中的应用.

【题目】如图 1 所示，两劲度系数均为 κ 的同样的轻弹性绳的上端固定在一水平面上，下端悬挂一质量为 m 的小物块.平衡时，轻弹性绳与水平面的夹角为α_0，弹性绳长度为 l_0.现将小物块向下拉一段微小的距离后从静止释放.

（1）证明小物块做简谐振动；

（2）若 $\kappa=0.50$ N/m，$m=50$ g，$\alpha_0=30°$，$l_0=2.0$ m，重力加速度 $g=9.8$ m/s^2，求小物块做简谐振动的周期 T；

（3）当小物块下拉的距离为 0.010 m 时，写出此后该小物块相对于平衡位置的偏离随时间变化的方程.已知：当 $x\ll 1$ 时，$\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x$，$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$.

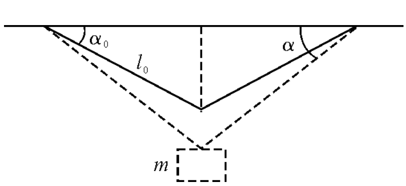

图 1　题图

方法 1：代数近似法

解：（1）取小物块的平衡位置为原点 O，y 轴的正方向竖直向下，如图 2 所示.

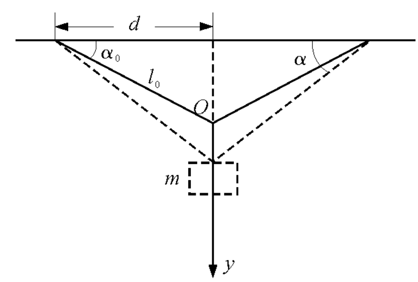

图 2　方法 1 分析图

由牛顿第二定律可知

$$ma=mg-2\kappa(l-L)\sin\alpha \tag{1}$$

式中 a 为物块的加速度，L 为弹性绳的原长，l 和 α 分别为物块离开平衡位置的位移为 y 时弹性绳的长度和弹性绳与水平面的夹角.

由几何关系得

$$l=\sqrt{d^2+(l_0\sin\alpha_0+y)^2} \tag{2}$$

$$\sin\alpha=\frac{l_0\sin\alpha_0+y}{l} \tag{3}$$

$$d=l_0\cos\alpha_0 \tag{4}$$

式(4)代入式(2)展开，化简得

$$l=\sqrt{l_0^2\cos^2\alpha_0+l_0^2\sin^2\alpha_0+y^2+2l_0y\sin\alpha_0}$$

由于 y 是小量，y^2 是二阶小量，可略去.得

$$l=\sqrt{l_0^2+2l_0y\sin\alpha_0}=l_0\sqrt{1+\frac{2y}{l_0}\sin\alpha_0}$$

当 $x\ll 1$ 时，$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$，得

作者简介：彭爱国（1972－　），男，中教高级，主要从事高中物理教学.

$$l = l_0 + y\sin\alpha_0 \tag{5}$$

将式(5)代入式(3),得

$$\sin\alpha = \frac{l_0\sin\alpha_0 + y}{l_0 + y\sin\alpha_0}$$

当 $x \ll 1$ 时,$\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$,化简得

$$l_0\sin\alpha = l_0\sin\alpha_0 + y - y\sin^2\alpha_0 - \frac{y^2}{l_0}\sin\alpha_0$$

忽略 y^2 项,得

$$l_0\sin\alpha = l_0\sin\alpha_0 + y\cos^2\alpha_0$$

即

$$\sin\alpha = \sin\alpha_0 + \frac{y}{l_0}\cos^2\alpha_0 \tag{6}$$

当小物块处在平衡位置时有

$$mg = 2\kappa(l_0 - L)\sin\alpha_0$$

即

$$L = l_0 - \frac{mg}{2\kappa\sin\alpha_0} \tag{7}$$

式(5)、(6)、(7) 代入式(1),消去 l,L,$\sin\alpha$,得

$$ma = mg -$$

$$2\kappa\left(y\sin^2\alpha_0 + \frac{mg}{2\kappa} + \frac{y^2}{l_0}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0 + \frac{mgy\cos^2\alpha_0}{2\kappa l_0\sin\alpha_0}\right)$$

略去 y^2 项

$$ma = -\left(2\kappa\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}\right)y$$

由简谐运动的特征方程知 $F_{回} = -Ky$,所以

$$K = 2\kappa\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}$$

因此,当 y 很小时,小物块做简谐运动.

(2) 小物块做简谐运动的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2\kappa}{m}\sin^2\alpha_0 + \dfrac{g}{l_0}\dfrac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}}} \tag{8}$$

将题给数据代入式(8) 得 $T = 1.8$ s.

(3) 因将小物块拉开距离 $y_0 = 0.010$ m 时从静止松手,故小物块做简谐振动的振幅 $A = 0.010$ m.

初始时,小物块速度为零,小物块位于最大位移处,其初相位为

$$\varphi_0 = 0 \tag{9}$$

圆频率为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 3.5\ \text{rad/s}$$

故在国际单位制中,小物块做简谐振动的方程为

$$y = 0.010\cos(3.5t)$$

方法 2:几何近似法

解:(1) 如图 3 所示,过 O 作 $OC \perp AO'$,交 AO' 于点 C,因 y 极小,所以 $\angle OAC$ 极小,所以 $\angle AOC \approx 90°$,即 $\angle COO' \approx \alpha_0$,则有

$$l = l_0 + y\sin\alpha_0$$

$$\sin\alpha = \frac{l_0\sin\alpha_0 + y}{l} = \frac{l_0\sin\alpha_0 + y}{l_0 + y\sin\alpha_0}$$

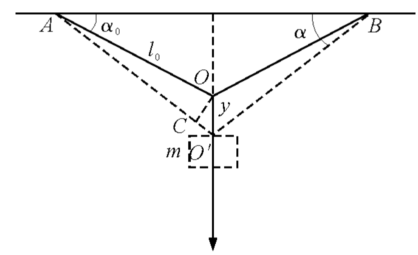

图 3　方法 2 分析图

当小物块处在平衡位置时有

$$mg = 2\kappa(l_0 - L)\sin\alpha_0$$

即

$$L = l_0 - \frac{mg}{2\kappa\sin\alpha_0}$$

取竖直向下为正方向,当物块离开平衡位置一微小位移 y 时,则回复力

$$F_{回} = mg - 2\kappa(l - L)\sin\alpha$$

将 l,$\sin\alpha$,L 代入上式得

$$F_{回} = \left[mgy\left(\sin\alpha_0 - \frac{1}{\sin\alpha_0}\right) - 2\kappa l_0 y\sin^2\alpha_0 - 2\kappa y^2\sin\alpha_0\right]\frac{1}{l_0 + y\sin\alpha_0}$$

分子中忽略 y^2 项,分母中忽略 y 项,得

$$F_{回} = -\frac{mgy\left(\dfrac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right) + 2\kappa l_0 y\sin^2\alpha_0}{l_0} =$$

$$-\left(2\kappa\sin^2\alpha_0 + \frac{mg}{l_0}\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right)y = -Ky$$

所以小物块做简谐运动.

(2)、(3) 同上.

此题方法 1 用代数近似法,过程比较繁难,对学生的数学能力要求较高,一般学生不容易推导出简谐运动的特征方程 $F_{回} = -Ky$,但用几何近似法则省去了大量的代数推导,只用到最基本的小量近似就可得到简谐运动特征方程. 所以,对这类问题,我们应优先考虑几何近似法.

巧解第 34 届全国中学生物理竞赛复赛第二题

杨祖华

（贵阳市第一中学　贵州 贵阳　550081）

（收稿日期：2017－09－26）

摘　要：利用圆锥曲线的特性以及开普勒第二定律等知识巧妙地求解了第 34 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试的第二题，总结了抛物线的特性及开普勒第二定律在天体运动中应用的技巧.

关键词：天体运动　圆锥曲线　开普勒第二定律

【题目】（第 34 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试第二题）（以下简称“复赛考试第二题”）星体 P（行星或彗星）绕太阳运动的轨迹为圆锥曲线 $r=\dfrac{k}{1+\varepsilon\cos\theta}$，式中 r 是 P 到太阳 S 的距离，θ 是矢径 SP 相对于极轴 SA 的夹角（以逆时针方向为正），$k=\dfrac{L^2}{GMm^2}$，L 是 P 相对于太阳的角动量，$G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$，为引力常量，$M\approx1.99\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，为太阳的质量，$\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$，为偏心率，$m$ 和 E 分别为 P 的质量和机械能. 假设有一颗彗星绕太阳运动的轨道为抛物线，地球绕太阳运动的轨道可近似为圆，两轨道相交于 C，D 两点，如图 1 所示. 已知地球轨道半径 $R_e\approx1.49\times10^{11}\,\mathrm{m}$，彗星轨道近日点 A 到太阳的距离为地球轨道半径的三分之一，不考虑地球和彗星之间的相互影响. 求：

（1）彗星先后两次穿过地球轨道所用的时间；

（2）彗星经过 C，D 两点时速度的大小.

已知积分公式

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+a}}=\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}-2a(x+a)^{\frac{1}{2}}+C$$

式中的 C 是任意常数.

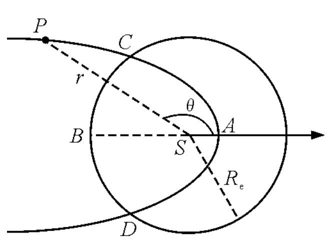

图 1　题图

主办方给的标准答案的解题思路是根据系统的能量关系，导出彗星运动的速度表达式，进而利用速度的微商定义式 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 变形为 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}r}{v}$ 后通过定积分求出运动时间. 然而，抛物线具有一些比较容易掌握的特性，利用这些特性和开普勒第二定律来解决这个问题会显得十分简单.

解：（1）由题意可知，彗星的轨迹方程为

$$r=\frac{\frac{2R_e}{3}}{1+\cos\theta}\tag{1}$$

如图 2 所示，彗星运动到地球轨道的 C 点时有

$$r=R_e\tag{2}$$

$$\theta+\varphi=\pi\tag{3}$$

$$AE=\frac{1}{3}R_e+r\cos\varphi\tag{4}$$

$$CD=2r\sin\varphi\tag{5}$$

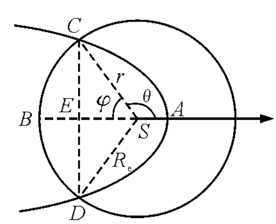

图 2　彗星运动到 C 点分析图

抛物线的弓形 CDA 的面积 S_1 为

$$S_1=\frac{2}{3}AE\cdot CD\tag{6}$$

$\triangle CDS$ 的面积 S_2 为

$$S_2=\frac{1}{2}CD\cdot r\cos\varphi\tag{7}$$

在 $C\to D$ 过程中，彗星与太阳连线扫过面积 S 为

$$S=S_1-S_2\tag{8}$$

令彗星在近日点 A 的速度为 v_A，由开普勒第二定律可知，彗星与太阳的连线在单位时间间隔内扫过的面积 S' 为

$$S'=\frac{1}{2}SA\cdot v_A\tag{9}$$

彗星先后两次经过地球轨道所用的时间为

$$t = \frac{S}{S'} \tag{10}$$

因为彗星运动的轨迹是抛物线,所以彗星与太阳构成的系统机械能守恒且为零.彗星在近日点 A 有

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \left(-\frac{GMm}{\frac{R_e}{3}}\right) = 0 \tag{11}$$

由式(1) ～ (11) 可得

$$t = \frac{20\sqrt{3}}{27}\sqrt{\frac{R_e^3}{GM}} \tag{12}$$

由式(12) 代入数据计算得

$$t = 6.40 \times 10^6 \text{ s} \tag{13}$$

(2) 彗星在 C 点的速率等于在 D 点的速率,由机械能守恒且为零可得

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + \left(-\frac{GMm}{R_e}\right) = 0 \tag{14}$$

即得

$$v_C = v_D = \sqrt{\frac{2GM}{R_e}} \tag{15}$$

由式(15) 代入数据计算得

$$v_C = v_D = 4.22 \times 10^4 \text{ m/s} \tag{16}$$

上文中的式(1) 和式(6) 是利用圆锥曲线的特性直接写出的,式(9) 是利用开普勒第二定律考虑极短时间间隔内的情况写出来的,其他的式子属于基本的几何、物理或能量关系式.下面,我们介绍本题涉及到的圆锥曲线的特性和式(9) 的来源.

1 圆锥曲线的极坐标方程

式子 $r(\theta) = \dfrac{k}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ 称为圆锥曲线的极坐标方程,式中的 k 等于通径长的一半,对于抛物线也等于顶点到焦点距离的 2 倍[式(1) 利用到了这一点],对于椭圆或双曲线也等于 $\dfrac{b^2}{a}$;式中的 ε 称为偏心率或离心率,对于抛物线,$\varepsilon = 1$[式(1) 利用到了这一点],对于椭圆,$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$,对于双曲线 $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$.

2 抛物线与坐标轴围成图形的面积公式

如图 3 所示,抛物线的方程为 $y = kx^2 (k > 0)$,抛物线与 x 轴及平行于 y 轴的辅助线围成的图形 Ox_1Q 的面积为

$$S_{Ox_1Q} = \int_0^{x_1} y\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x_1y_1 \tag{17}$$

则抛物线与 y 轴及平行于 x 轴的辅助线围成的图形 Oy_1Q 的面积为

$$S_{Oy_1Q} = \frac{2}{3}x_1y_1 \tag{18}$$

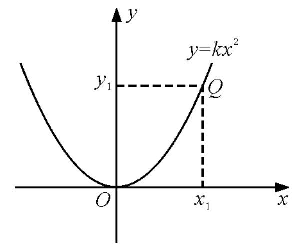

图 3 抛物线

只要从抛物线的顶点算起,式(1) 和式(2) 对任意形式的抛物线均适用[式(16) 利用到了式(2) 的结论].

3 行星与太阳连线扫过面积的变化率

在近日点(或远日点),行星运动的速度 v 垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$,在行星运动到近日点时的一小段时间 Δt 内,考虑 $\Delta t \to 0$ 的微小过程内,行星运动的位移等于 $v\Delta t$ 且仍然垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$,该微小过程中行星与太阳连线扫过的面积为 $\dfrac{r(v\Delta t)}{2}$,即得该过程中行星与太阳连线扫过的面积对时间的变化率为 $\dfrac{rv}{2}$,这即是单位时间内行星与太阳连线扫过的面积,式(9) 利用了这个结果.

总之,对于天体运动的问题,若是抛物线轨道,需要计算某过程中运动的时间,则可以利用上文中的式(18)、开普勒第二定律及其他关系式联立求解,其中,在写面积对时间的变化率时,考虑从近日点或远日点处着手会比较容易,这时可以直接得出面积的变化率等于 $\dfrac{rv}{2}$,这种方法相对利用积分的方式较为简单.

参 考 文 献

1 罗炼.刍议高中物理中天体运动类题型的解题技巧.数理化解题研究,2016(31):65
2 陈伟山.天体运动专题教学探究.科技视界,2014(20):227
3 沈晨.专题 11 天体运动种种.中学物理教学参考,2005(05):45 ～ 55
4 李宁,王洪娜,孙登照.对物理竞赛中的天体运动问题的讨论.中学物理,2017(03):43 ～ 44
5 王建伟,李兴.近日点和远日点速度的两种典型解法.物理教师,2013(06):48
6 徐炳.看嫦娥如何奔月 —— 天体运动类问题的解题方法和技巧.物理教学探讨,2009(03):53 ～ 55