一个电磁感应问题解答的探讨

叶惠芳　林辉庆
（杭州市余杭高级中学　浙江 杭州　311100）

（收稿日期：2017－10－24）

摘　要：对一道中学物理常见的电磁感应问题流行的解答提出质疑，并对问题给出全面而正确的解析.

关键词：磁感应强度　变化　电动势　加速度

1　一个电磁感应问题及常见解答

【题目】 如图1所示，两足够长的光滑平行金属导轨 MN 和 PQ 间的距离 $L=0.4$ m，金属导轨所在平面与水平面的夹角 $\theta=37°$，M 和 P 间连接电阻 $R=2.0\ \Omega$，质量 $m=0.04$ kg，电阻 $r=3.0\ \Omega$ 的金属棒 AB 垂直放置在导轨上，与导轨接触良好且与 MP 距离 $x_0=0.5$ m. 在 $MPNQ$ 区域有垂直于导轨向上随时间变化的匀强磁场，已知 $t=0$ 时刻磁感应强度 $B_0=0.5$ T，若此刻无初速释放金属棒 AB，它将沿导轨匀加速下滑. 已知 $\sin 37°=0.6$，$\cos 37°=0.8$. 试求：

（1）金属棒匀加速下滑的加速度大小；

（2）从 $t=0$ 时刻开始磁感应强度 B 随时间 t 应如何变化.

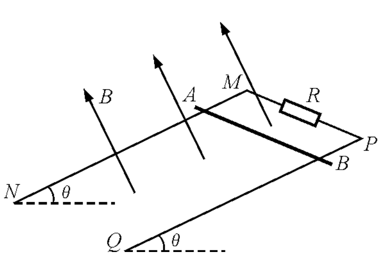

图1　题图

常见解答：AB 能匀加速下滑，则可知电路中的感应电流为零，故其加速度

$$a=g\sin 37°=6\ \mathrm{m/s^2}$$

由电路中感应电流为零可知感应电动势为零，回路中磁通量不发生变化，即

$$B_0Lx_0=BL\left(x_0+\frac{1}{2}at^2\right)$$

解得

$$B=\frac{B_0x_0}{x_0+\frac{1}{2}at^2}=\frac{1}{2+12t^2}\ \mathrm{T} \qquad (1)$$

2　对常见解答的质疑

常见解答隐含着如下的矛盾：在 $t=0$ 时刻，AB 速度为零，不切割磁感线，则动生电动势 $E_{动}$ 为零，但磁感应强度 B 随时间 t 是变化的，因此可能会产生感生电动势，这样回路中就可能会有感应电流，导体棒 AB 可能会受安培力作用，不会以加速度 $a=g\sin\theta$ 下滑.

让我们来计算一下 $t=0$ 时感生电动势 $E_{感}$ 的大小

$$E=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=Lx_0\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-\frac{6t}{(1+6t^2)^2}$$

在 $t=0$ 时，$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=0$，所以 $t=0$ 时感生电动势 $E_{感}$ 等于零，AB 棒确实以加速度 $a=g\sin\theta$ 下滑.

虽然这里验证了当磁感应强度 B 随时间 t 以式(1)变化，AB 以 $a=g\sin\theta$ 匀加速下滑，但这里仍存在更普遍的问题：如果 B 随时间按其他方式变化，AB 是否也能以其他加速度匀加速下滑？

3　对一般解答的探讨

设磁感应强度 B 以 $B=B(t)$ 方式变化，AB 以加速度 a 匀加速下滑，AB 与 MP 的距离

$$x=x_0+\frac{1}{2}at^2$$

t 时刻的磁通量为

$$\Phi=LxB$$

感生电动势为

$$E=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=LB\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Lx\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

感应电流为

$$I=\frac{E}{R+r}$$

AB 棒所受的安培力

$$F_A=BIL$$

由牛顿第二定律有

$$mg\sin\theta-F_A=ma$$

联立以上各式解出

$$mg\sin\theta-\frac{B^2L^2at}{R+r}-\frac{BL^2}{R+r}\left(x_0+\frac{1}{2}at^2\right)\frac{dB}{dt}=ma \qquad (2)$$

代入有关数据得到

$$6-0.8aB^2t-0.4B(1+at^2)\frac{dB}{dt}=a \qquad (3)$$

从理论上讲,对任何一个 a 值,由式(3)都能求出对应的 $B=B(t)$.

把 $a=g\sin\theta$ 代入式(2)得到

$$-Bat=\left(x_0+\frac{1}{2}at^2\right)\frac{dB}{dt}$$

化为

$$-\frac{d\left(\frac{1}{2}at^2\right)}{x_0+\frac{1}{2}at^2}=\frac{dB}{B}$$

对上式两边积分即可得到

$$B=\frac{C}{x_0+\frac{1}{2}at^2} \qquad (4)$$

其中 C 是积分常数.将 $t=0$ 时,$B=B_0=0.5$ T 代入上式,即得 $C=0.25$ T·m.

可见当 $a=g\sin\theta$ 时式(1)只是式(3)对应的一个特殊解.

让我们再看另一种特殊情况,即 $a=0$,导体棒 AB 静止在导轨上,式(2)为

$$mg\sin\theta=\frac{BL^2x_0}{R+r}\frac{dB}{dt}$$

化为

$$mg\sin\theta(R+r)dt=BL^2x_0dB$$

解出

$$B^2=\frac{2mg\sin\theta(R+r)}{x_0L^2}t+C$$

将 $t=0$ 时,$B=B_0=0.5$ T 代入,得到积分常数 $C=B_0^2$,有

$$B=\sqrt{B_0^2+\frac{2mg\sin\theta(R+r)}{x_0L^2}t} \qquad (5)$$

在一般情况下,式(2)是非线性微分方程,我们无法由它求出 $B(t)$ 的解析式.但我们可以根据这个方程,用微元数值计算法得到函数 $B=B(t)$ 对应不同时刻(例如每隔 $\Delta t=0.01$ s)的 B 值,并由此作出 $B-t$ 图像.

例如对于 $a=4$ m/s^2,在 $t_0=0$ 时刻,已知 $B_0=0.5$ T,此时 B 对时间 t 的导数 $\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_0}$ 满足

$$6-0.8\times4\times B_0^2t_0-0.4B_0(1+4t_0^2)\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_0}=4 \qquad (6)$$

求出

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_0}=10\ \text{T/s}$$

在 $t_1=0.01$ s 时

$$B_1=B_0+\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_0}\times\Delta t=0.5\ \text{T}+10\times0.01\ \text{T}=0.6\ \text{T}$$

在 $t_1=t_0+\Delta t=0.01$ s 时刻 $\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_1}$ 满足

$$6-0.8\times4\times B_1^2t_1-0.4B_1(1+4t_1^2)\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_1}=4 \qquad (7)$$

求出

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_1}=8.282\ \text{T/s}$$

在 $t_2=0.02$ s 时刻

$$B_2=B_1+\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_1}\times\Delta t=0.6\ \text{T}+8.282\times0.01\ \text{T}=0.683\ \text{T}$$

$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_2}$ 满足

$$6-0.8\times4\times B_2^2t_2-0.4B_2(1+4t_2^2)\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_2}=4 \qquad (8)$$

求出

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t_2}=7.201\ \text{T/s}$$

同理求出以后各时刻的 B 值如表 1 所示.

表 1　$a=4$ m/s^2 时各时刻对应的 B 值

t/s	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
B/T	0.5	0.6	0.683	0.755	0.819	0.877
t/s	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	
B/T	0.930	0.979	1.024	1.065	1.103	

(下转第 49 页)

中于系统的质心进行整体分析，即万有引力的计算与质心无关.

严格地说，万有引力定律只适用于质点. 对于不能看做质点的物体，一般用微积分的思想进行分析.

均匀球体对其外部物体的吸引力，可以从质心(球心)计算距离. 此为特例. 非均匀球体，对其外部物体的吸引力，一般不能从质心(或球心)计算距离.

6　启示

真理是相对的. 原来以为很正确的东西，可能也存在一些缺陷. 当外部条件略有变化的时候，其结论未必还成立. 中学阶段在分析万有引力问题时，遇到最多的是均匀球状天体对其他物体的吸引力，这种情况可以从质心(球心)计算引力距离. 许多师生受此影响，不加证明将该结论推广到非均匀球体，导致了一些貌似合理的错误. 教训告诉我们，直觉不一定是正确的，直觉只是给我们提供了一个可能的研究方向，其是否正确需要我们作进一步的科学分析[2].

再比如，在力学中，经常把物体看作质点，但是在热学部分，许多情况又恰恰不能把物体看作质点，需要考虑其体积的变化. 这就导致许多人在处理相关问题时栽在了“体积”这匹黑马上[3].

在科学史上，类似的事情也发生过多次. 比如，李政道和杨振宁获得诺贝尔物理学奖的成果是，提出“弱相互作用中宇称不守恒”. 在“李-杨”之前，人们发现很多情况下“宇称守恒”，于是大家想当然地认为，宇称在其他情况下也是守恒的. 在“李-杨”提出“弱相互作用中宇称不守恒”之后，吴健雄(美籍华裔)进行了实验验证，证实了“李-杨”的观点.

最后，我们以吴健雄的话作为总结. “这件事给我们一个教训，就是永远不要把所谓‘不验自明’的定律视为是必然的.”

参考文献

1　吴国盛. 科学的历程(第 2 版). 北京：北京大学出版社，2002. 213 ~ 214

2　金逊. 到底是几倍. 中学物理，2014(21)：71 ~ 72

3　金逊. 热功部分要注意“体积”黑马. 理科考试研究·高中版，2005(1)

(上接第 44 页)

作出 $B-t$ 图像如图 2 所示.

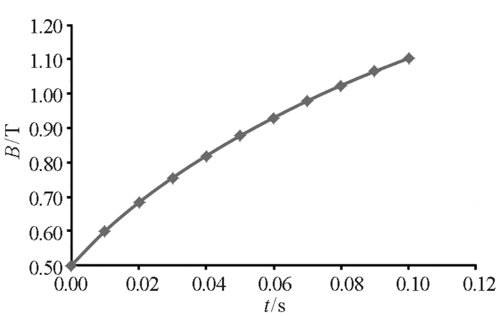

图 2　$a = 4\ \mathrm{m/s^2}$ 时的 $B-t$ 图像

假如要使棒 AB 静止释放后以 $5\ \mathrm{m/s^2}$ 的加速度向上运动，即取 $a = -5\ \mathrm{m/s^2}$，同理可以求出对应的 $B = B(t)$ 在不同时刻的值，如表 2 所示.

表 2　当 $a = -5\ \mathrm{m/s^2}$ 时各时刻对应的 B 值

t/s	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
B/T	0.500	1.051	1.313	1.526	1.711	1.880
t/s	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	
B/T	2.038	2.188	2.332	2.473	2.613	

作出 $B-t$ 图像如图 3 所示.

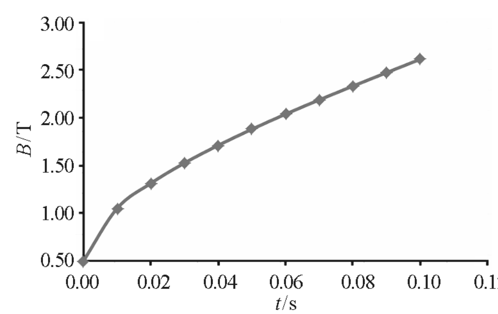

图 3　$a = -5\ \mathrm{m/s^2}$ 时的 $B-t$ 图像

用同样的方法可以求出对应棒 AB 以任一加速度运动，磁感应强度 B 随时间 t 的变化方式.

4　结论

通过上面的研究知道，常规解法得到的结果，只是一个特殊解，并不是这个问题的唯一解. 实际上，只要磁场以恰当的方式变化，导体棒能以任一加速度沿导轨向下匀加速运动，也能以任一加速度沿导轨向上匀加速运动，还可以保持静止不动.