对“联动问题”的解法探究

—— 用“微元法”和“转换参考系法”双解“联动问题”

孙德峰

(北京第十二中学　北京　100071)

刘　芳

(北京教育学院丰台分院　北京　100073)

(收稿日期:2017－11－09)

在不少的竞赛题目中,都涉及到了“联动问题”.一般来讲,这些待求解的运动形式都较为复杂,利用高中教材中所讲授的典型运动规律很难求解,因此大部分辅导资料都采用了“微元法”来求解.

用“微元法”固然能够将问题解决,而且有利于提高学生解决动态变化过程的能力,但“微元法”也存在解题过程相对繁琐的不足.笔者在教学过程中发现,在解决“连结体”间的运动学问题时,由于涉及到的是两个或两个以上物体之间的运动,故灵活地转换参考系,会使问题大大得到简化.下面甄选 4 个典型题目,各用两种方法求解,供读者参考.

【例 1】如图 1 所示,足够长的直杆 MN 固定,一个圆环与直杆在同一平面内,且以垂直于 MN 的恒定速度 v 向右运动.AB 为圆环的直径,且 AB 垂直于 MN.当 AB 的 4 等分点 $C\left(\text{即 } AC=\dfrac{AB}{4}\right)$ 经过直杆瞬间,圆环与直杆的交点 M 或 N 沿直杆方向运动的速度大小是多少?

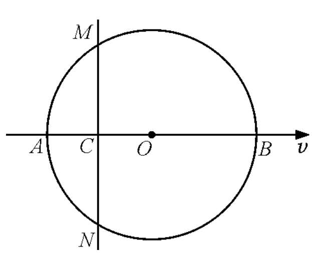

图 1　例 1 题图

微元法:

从如图 1 所示的时刻再经过 $\Delta t\to 0$ 的时间,圆环运动到了如图 2 所示的虚线位置.为了读者阅读方便,笔者将圆环的移动距离做了适当的夸张(以下皆为如此).容易发现圆环与直杆的交点 M 点运动到了 M' 点,连接 OM 和 $O'M'$,交点为 D.由于 $\Delta t\to 0$,不难得到

$$\angle MDM'=\angle ODO'=\Delta\theta\to 0$$

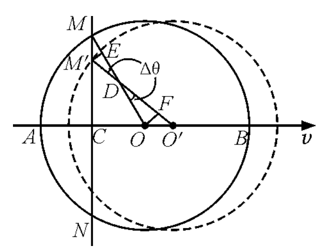

图 2　圆环移动

在 OM 上取一点 E,使得 $DE=DM'$;在 DO' 上取一点 F,使得 $DO=DF$.

值得注意的是,我们现在构造了两个非常特殊的等腰三角形.由于顶角趋近于零,则两个底角就趋近于 90°,可以认为底边与两腰近似垂直.不妨给这样的三角形起一个特殊的名字 ——“双直角等腰三角形”.在接下来的题目中我们会逐渐体会到这种特殊的三角形在“微元法”中所起到的作用.

由于 $OM=O'M'$,所以 $ME=O'F$.因为 C 点是 4 等分点,则 $\angle CMO=30°$;$\angle COM=60°$.再根据 $OM\perp OF$,可知:$\angle FOO'=30°$.所以 $MM'\cos 30°=ME=O'F=OO'\sin 30°$,又 $OO'=v\Delta t$;$MM'=v_M\Delta t$,代入上式可得

$$v_M=\frac{v}{\sqrt{3}}$$

转换参考系法:

由于直杆没动,所以沿直杆方向的速度即为 M 点相对地面的速度.以圆环为参考系,因为 M 点同时又沿圆环运动,故 M 点相对圆环的速度必沿圆环切线方向;同时,圆环又水平向右运动,所以圆环的速度 v 又可理解为牵连速度.根据 $\boldsymbol{v}_{绝对}=\boldsymbol{v}_{相对}+\boldsymbol{v}_{牵连}$ 可知三者速度的几何关系如图3所示.很容易看出

$$v_M = \frac{v}{\sqrt{3}}$$

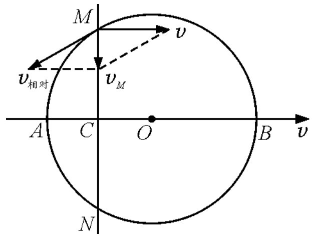

图 3　绝对速度、相对速度、牵连速度几何关系

【**例 2**】如图 4 所示，一个半径为 R 的环（环心为 O_2）立在水平面上，另一个同样大小的环（环心为 O_1）以水平向右的速度 v 从前一个环的旁边经过．试求当两环环心相距为 $d(2R > d > 0)$ 时，两环上部的交点 A 的运动速度．两环均很薄，可以认为两环是在同一个平面内，第二个环是紧贴着第一个环掠过去的．

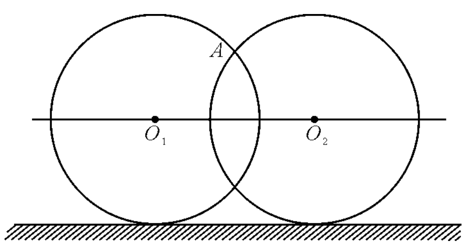

图 4　例 2 题图

微元法：

从如图 4 所示的时刻再经过 $\Delta t \to 0$ 的时间，圆环运动到了如图 5 所示的虚线位置．交点由 A 点运动到了 B 点，而原来的 A 点随左边圆环平移到了 C 点．由于 $\Delta\theta \to 0$，所以 $\triangle ABO_2$ 为“双直角等腰三角形”，故

$$\angle CAB = 90° - \theta$$

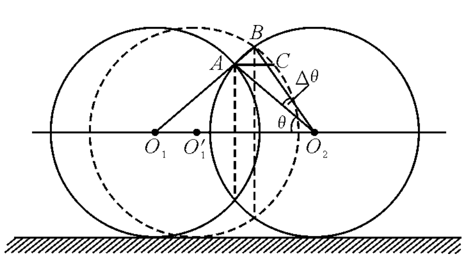

图 5　圆环运动

又知道 $AC = O_1O_1{}'$，所以有

$$AB = \frac{\frac{1}{2}AC}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

其中 $AC = v\Delta t$；弧长 $\overset{\frown}{AB}$ 近似等于弦长 AB，所以有 $AB = v_A\Delta t$，代入上式可得

$$v_A = \frac{v}{2\sin\theta} = \frac{Rv}{2\sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{Rv}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

转换参考系：

仿照例 1 的做法，不妨以运动的圆环为参考系，绝对速度为交点沿静止圆环运动的速度；相对速度为沿运动圆环运动的速度；牵连速度为运动圆环自身的速度，如图 6 所示．

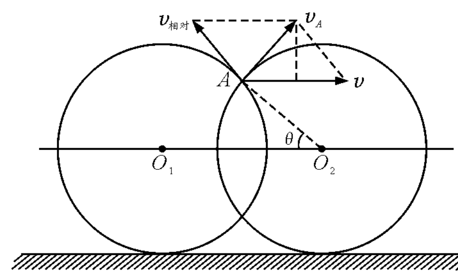

图 6　速度关系

根据几何图形的对称性，交点 A 沿两圆环的运动速度大小必然是相等的，图 6 中的矢量三角形为等腰三角形，故根据几何关系可得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\frac{1}{2}v}{v_A}$$

所以有　$v_A = \dfrac{v}{2\sin\theta} = \dfrac{Rv}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$

【**例 3**】两只小环 O 和 O' 分别套在静止不动的竖直杆 AB 和 $A'B'$ 上．一根不可伸长的绳子，一端系在 A' 点上，绳子穿过环 O'，另一端系在环 O 上．如图 7 所示，若圆环 O' 以恒定速度 v' 沿杆向下运动，$\angle AOO' = \alpha$ 时，求圆环 O 的运动速度为多大？

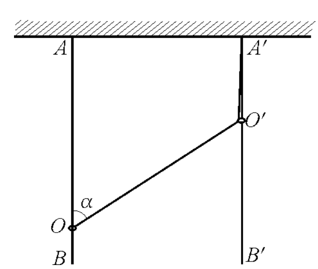

图 7　例 3 题图

微元法：

从如图 7 所示的时刻再经过 $\Delta t \to 0$ 的时间，两圆环及细线运动到了如图 8 所示的虚线位置．在 OE 上取一点 D，使 $CE = DE$；在 $O'E$ 上取一点 D'，使 $C'E = D'E$．由于 $\Delta t \to 0$，故 $\Delta\theta \to 0$，所以又构造了两个“两直角等腰三角形”．

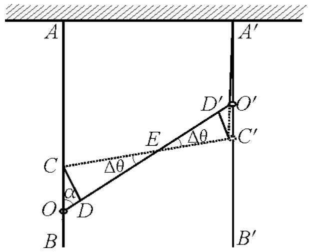

图 8　圆环及细线运动

根据绳长不会发生变化这一特点，可写出几何关系

$$OO' = O'C' + CC'$$

结合上述特殊三角形的构造，得到

$$OD + O'D' = O'C'$$

考虑到运动情况

$$OD = OC\cos\alpha = v\Delta t\cos\alpha$$

$$O'D' = O'C'\cos\alpha = v'\Delta t\cos\alpha$$

结合式(3) 可以得到

$$v = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v'$$

转换参考系法：

本题有别于以上两个例题，连结体的两个“主角”都在运动，在这种情况下，就更需要以其中一个运动物体为参考系而不是以地面为参考系，从而使问题得到简化. 例如，本题可以以 O' 环为参考系，则容易得到 O 环相对 O' 环的速度为

$$v_{相对} = v + v'$$

在假定 O' 环不动的前提下，本题就简化为绳子末端速度分解的问题，如图 9 所示，沿绳子和垂直于绳子将 v 相对分解，得到

$$v_{相对}\cos\alpha = (v+v')\cos\alpha$$

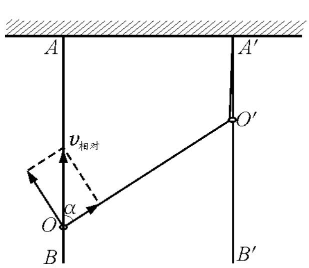

图 9　绳子末端速度分解

其中“$v_{相对}\cos\alpha$”可以理解为收绳子的速度，即圆环 O' 下滑的速度 v'，从而得到

$$v' = (v+v')\cos\alpha$$

即

$$v = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v'$$

【例 4】如图 10 所示，A，B，C 为 3 位芭蕾舞演员同时从边长为 l 的三角形顶点 A，B，C 出发，以相同的速率 v 运动；运动中始终保持 A 朝着 B，B 朝着 C，C 朝着 A. 试问经过多少时间 3 人相聚？每个演员跑了多少路程？

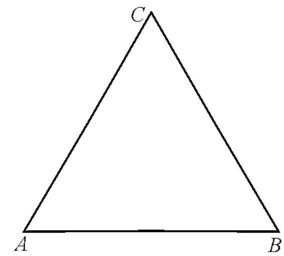

图 10　例 4 题图

微元法：

本题很明显是一个连续变化的问题，首先想到的是利用“微元法”来解决. 从如图 10 所示的时刻再经过 $\Delta t \to 0$ 的时间，3 位演员及其连线运动到了如图 11 所示的长虚线位置；又经过 $\Delta t \to 0$ 的时间，3 位演员及其连线运动到了短虚线的位置 ……

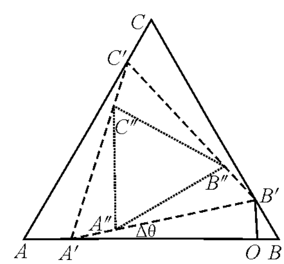

图 11　3 位演员及连线运动的情况

由于 $\Delta t \to 0$，故 $\Delta\theta \to 0$，在 $A'B$ 上截取 $A'O = A'B'$，又构造了一个“两直角等腰三角形”. 所以

$$A'B' = A'O = AB - AA' - OB$$

其中

$$AA' = v\Delta t$$

$$OB = BB'\cos 60^\circ = \frac{1}{2}v\Delta t$$

联立以上 3 式可得

$$A'B' = l - \frac{3}{2}v\Delta t$$

同理

$$A''B'' = A'B' - \frac{3}{2}v\Delta t = l - 2\times\frac{3}{2}v\Delta t$$

$$A^nB^n = l - n\cdot\frac{3}{2}v\Delta t$$

最终 3 位演员会相聚到一点，故

$$A^nB^n = 0$$

教学案例设计与分析

超重和失重的教学设计

朱玉江

（海码课堂　北京　100088）

（收稿日期：2018－01－19）

摘　要：通过对传统教学方法进行剖析，指出缺憾、分析不足，在问题分析的基础上，呈现新的教学逻辑，重整素材，设计实验，最后分享对探究式教学和核心素养的学习心得和感悟.

关键词：超重和失重　物理观点　科学思维　科学探究

本文缘起于笔者听的一节关于“超重和失重”的公开课，基于课堂对学生的观察以及课后与教师的讨论，对传统超失重的教学产生“意犹未尽”之感，于是结合“素养教学”这一新的教育理念，谈谈对“超重和失重”教学方法的个人观点和改进建议.

超重和失重是生活中常见的现象，通过超重和失重的教学，可以加深同学们对牛顿运动定律的理解，提升动力学分析的水平，培养用物理知识解决现实问题的能力.

一般的教学思路如图 1 所示.

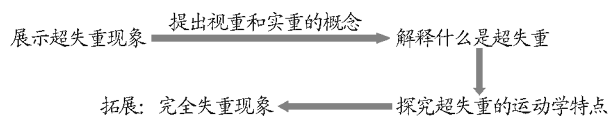

图 1　一般教学思路

其中厘清“视重”和“实重”的概念是解释“超失重”现象的前提，然而一般在教学中，我们急于给学生“视重”和“实重”的概念，对概念的形成没有进一步阐释，导致学生难以突破“体重计测体重”这一感性认识的“藩篱”，其实“视重”和“实重”是有着具体问题情境的，那就是“体重计到底测的是什么力？”通过观点、讨论和探究可以让学生形成“体重计测量

得到
$$t=n\Delta t=\frac{2l}{3v}$$

每位演员跑过的路程
$$s=vt=\frac{2}{3}l$$

转换参考系法：

A，B，C 运动形式相同，故只需关注 A，B 就可以将问题解决. 不妨以 B 演员为参考系，经过分析可以知道：A，B 始终在一条直线上；A 与 B 速度方向的夹角始终为 $120°$.

那么 A，B 两位演员沿二者连线方向上彼此接近的相对速度为
$$v+v\cos60°=\frac{3}{2}v$$

最终 A，B 相遇，则 A 相对 B 走过的距离为 l，则
$$t=\frac{l}{\frac{3}{2}v}=\frac{2l}{3v}$$

故有
$$s=vt=\frac{2}{3}l$$

从以上 4 个例题来看，“微元法”的解题套路都很相似 —— 构造好“两直角等腰三角形”，确立好边长和运动的关系即可将问题解决. “微元法”的优点是思路简单、易操作；缺点是画图、运算过程相对较为复杂.

而“转换参考系法”则是建立在对物体间运动关系的准确把握之上，当一个物体运动，另一物体相对地面保持静止的时候（例 1 和例 2），我们往往以运动物体为参考系，利用相对运动的矢量方程即可；在两个或两个以上物体都运动的时候，不能简单、直接地套用相对运动矢量方程得到相对速度，而是应该仔细观察二者之间的运动关系，究竟是合成之后再分解（例 3），还是分解之后再合成（例 4），这要视题目而定.

方法无好坏之分，从培养学生物理思维和解题能力的角度来讲，这两种解题思路都值得向学生介绍，只有这样，学生在遇到问题时才能有更开阔的思路，甚至还会想出更精彩的解法.