

碰撞在质心系中遵循的普遍规律

翟爽

(北京市日坛中学 北京 100020)

(收稿日期:2017-11-10)

摘要:从质心系中看两体碰撞问题,经过推导证明碰撞在质心系内遵循更为简单而普遍的规律.若两物体发生完全非弹性碰撞,碰后两物体都将静止在质心处;若两物体发生弹性碰撞,碰撞前后,两物体相对于质心系的速度大小都不变,但是方向都与原来相反.碰撞前后,两物体相对于质心系的动量互换,且总动量始终为零.碰撞前后,两物体相对于质心系的动能均保持不变.

关键词:两体碰撞 质心系 规律

在地面参考系中,多个质点相互作用时的运动规律是比较复杂的.例如:对于不同条件下的两体碰撞问题,我们需要对碰撞前后的动量和机械能进行分析,通过复杂的计算来判断碰撞前后物体运动的变化情况.本文从质心系中看问题,发现两体碰撞前后,物体的速度及动量变化遵循非常简单的规律.

1 引入质心系

如图1所示,空间有两个质点1和2.根据牛顿第二定律和牛顿第三定律知:在不受其他外力情况下,两个物体相互作用时,普遍遵循如下的方程

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} \quad (2)$$

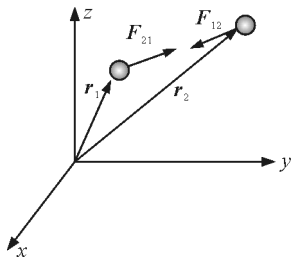


图1 空间两质点相互作用

将式(1)和式(2)相加得

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0 \quad (3)$$

上式可以变形为

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = 0 \quad (4)$$

如果把方程看作是某个质点的运动方程,并称这个特殊的质点为质心,如图2中的c,则这个质点的质量 m_c 和位置 \mathbf{r}_c 分别为

$$m_c = m_1 + m_2 \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

即质心的质量为两个质点的质量之和,质心的位置为两个质点的“平均位置”.

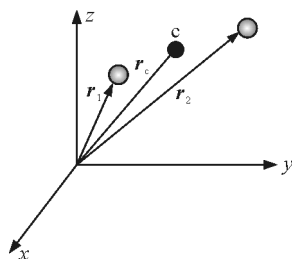


图2 引入质心

若 $m_1 = m_2$, 则

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$$

质心在两质点正中间;当 $m_1 > m_2$ 时,质心的位置离质点1比较近,当 $m_1 < m_2$ 时,质心的位置离质点2比较近.

把两个质点看成一个整体,当这个质点组不受外力,只有两个质点之间的内力相互作用时,无论是碰撞前、碰撞后或者是碰撞的过程中,式(4)恒成

立,即无论两个质点之间碰撞的内力多么复杂,质心总是保持静止或者匀速直线运动状态.

2 从质心系中看两体碰撞

2.1 从质心系中看两体的位置

质点1相对于质心c的位置 r_{1c} 为

$$\begin{aligned} r_{1c} &= r_1 - r_c = \\ r_1 - \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} &= \frac{m_2 (r_1 - r_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (7)$$

质点2相对于质心c的位置 r_{2c} 为

$$\begin{aligned} r_{2c} &= r_2 - r_c = \\ r_2 - \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} &= -\frac{m_1 (r_1 - r_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (8)$$

可以看出矢量 r_{1c} 与 r_{2c} 互相平行,这说明质心是处于两个质点的连线上,如图3所示.两个矢量的长度之比为

$$\frac{|r_{1c}|}{|r_{2c}|} = \frac{m_2}{m_1}$$

即质心到质点1,2的距离与质点1,2的质量成反比.且质心相对于质点1,2的位置不会因为坐标系的选取不同而不同.

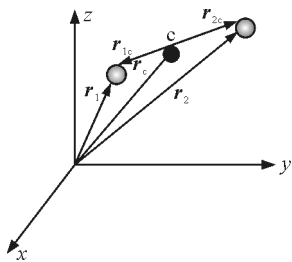


图3 位置关系

2.2 从质心系中看碰撞前后的速度变化规律

由于质点组不受其他外力,只有两个质点之间的内力相互作用,由式(4)可知:质心总是保持静止或者匀速直线运动状态,即质心处于平衡状态.

若将直角坐标系的坐标原点选取在质心上,即以质心为参考系(简称质心系),那么这个参考系为惯性参考系.

设碰撞前质点1和2相对于地面的速度分别为

$$v_1 = \frac{dr_1}{dt} \quad v_2 = \frac{dr_2}{dt}$$

碰撞后质点1和2相对于地面的速度分别为 u_1, u_2 .

根据动量守恒关系,有

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (9)$$

牛顿根据碰撞过程中动能的损失情况,引入了恢复系数 e ,其定义为

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \quad (10)$$

实验测量表明,恢复系数的值处于0和1之间^[1].当 $e=0$ 时,碰撞后的动能损失最大,称为完全非弹性碰撞;当 $e=1$ 时,碰撞后的动能没有损失,称为弹性碰撞.由式(9)和式(10)得到碰撞后的速度为

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

将式(7)和式(8)对时间求导得到碰撞前质点1和2相对于质心的速度 v_{1c} 和 v_{2c} ,即

$$v_{1c} = \frac{dr_{1c}}{dt} = -\frac{m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2c} = \frac{dr_{2c}}{dt} = \frac{m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

设碰撞后质点1和2相对于质心的速度为 u_{1c} 和 u_{2c} ,则

$$u_{1c} = u_1 - \frac{dr_c}{dt} = \frac{e m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} = -e v_{1c}$$

$$u_{2c} = u_2 - \frac{dr_c}{dt} = -\frac{e m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} = -e v_{2c}$$

当 $e=0$ 时, $u_{1c} = u_{2c} = 0$,即碰撞后的质点1和2相对于质心系的速度为零,说明碰撞后两个质点粘在一起,且相对质心静止.

当 $e=1$ 时, $u_{1c} = -v_{1c}, u_{2c} = -v_{2c}$,这表明在质心系中去观测两体的弹性碰撞,两质点在碰撞前后相对于质心c的速度大小相等,方向相反.

此外,因为质心系中弹性碰撞前后质点的速度大小不变,所以质点的动能也保持不变.

2.3 从质心系中看碰撞前后的动量变化规律

碰撞前,质点1和质点2相对于质心的动量为

$$m_1 v_{1c} = -\frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 v_{2c} = \frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

探讨一道疑似错题的额外价值

伍秀峰

(上海市位育中学 上海 200231)

(收稿日期:2017-11-11)

摘要:练习题的编撰时常会遇到数据的错误或矛盾,尤其是计算题等.实验题偶尔也可能虚构数据以达成对学生数据处理方面的训练,但如果是真实数据也产生矛盾该如何看待,作了一点粗浅的探讨.

关键词:数据 误差 观点

1 引言

作为物理学科,要求的是理性分析现象和规律,但仅仅是定性处理显然是不够的,它与自然课的很大区别在于理解现有的规律和公式,并运用到判断和计算方面.测量和计算是研究中不可或缺的一环,这方面的练习题能够起到培养学生科学素养的目的;虽然物理是建立在实验的基础上的,但真实世界非常复杂,需要将其简化为物理模型才能让学生去处理,由此在出题时常常会编造数据及条件,甚至在

实验题中也会有凑数字的现象,那么如果给的是真实数据,但不同的观点得出矛盾的结果,又该如何看待?

2 题干暗含的矛盾

【题目】(2013年普通高等学校招生全国统一考试海南卷)某同学用图1所示的实验装置验证机械能守恒定律.已知打点计时器所用电源的频率为50 Hz,当地重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.实验中该同学得到一条点迹清晰的完整纸带.纸带上的第一个点

可以看出 $m_1 v_{1c} = -m_2 v_{2c}$,这说明在碰撞前,从质心系中观测质点1和2的动量是大小相等方向相反的,两者之和为零.

碰撞后,质点1和质点2相对于质心的动量为

$$m_1 \mathbf{u}_{1c} = \frac{em_1 m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 \mathbf{u}_{2c} = -\frac{em_1 m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

对于完全非弹性碰撞, $e = 0$ 时,有

$$m_1 \mathbf{u}_{1c} = m_2 \mathbf{u}_{2c} = 0$$

即两质点都静止在质心处,两者之和为零.

对于弹性碰撞, $e = 1$ 时,有

$$m_1 \mathbf{u}_{1c} = -m_2 \mathbf{u}_{2c}$$

即从质心系中观测质点1和2的动量,还是大小相等方向相反,两者之和为零.且 $m_1 \mathbf{u}_{1c} = m_2 \mathbf{v}_{2c}$, $m_2 \mathbf{u}_{2c} = m_1 \mathbf{v}_{1c}$,这说明质心系中碰撞的两个物体,碰撞的效

果是两个物体的动量进行交换.

3 结束语

从质心系中看两体发生完全非弹性碰撞,碰后两物体都将静止在质心处.从质心系中看两体发生弹性碰撞,遵循如下规律:

(1) 从质心系中观测两个物体碰撞前后的速度时,其大小均不变,但是方向变为反向.

(2) 从质心系中观测两个物体的动量时,碰撞前后总动量始终为零,且碰撞的效果是两个物体的动量互换.

(3) 从质心系中观测两个物体的动能时,碰撞前后,两个物体的动能均不变.

参考文献

- 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程·力学.北京:高等教育出版社,2004.127~130