

# 探讨一道疑似错题的额外价值

伍秀峰

(上海市位育中学 上海 200231)

(收稿日期:2017-11-11)

**摘要:**练习题的编撰时常会遇到数据的错误或矛盾,尤其是计算题等.实验题偶尔也可能虚构数据以达成对学生数据处理方面的训练,但如果是真实数据也产生矛盾该如何看待,作了一点粗浅的探讨.

**关键词:**数据 误差 观点

## 1 引言

作为物理学科,要求的是理性分析现象和规律,但仅仅是定性处理显然是不够的,它与自然课的很大区别在于理解现有的规律和公式,并运用到判断和计算方面.测量和计算是研究中不可或缺的一环,这方面的练习题能够起到培养学生科学素养的目的;虽然物理是建立在实验的基础上的,但真实世界非常复杂,需要将其简化为物理模型才能让学生去处理,由此在出题时常常会编造数据及条件,甚至在

实验题中也会有凑数字的现象,那么如果给的是真实数据,但不同的观点得出矛盾的结果,又该如何看待?

## 2 题干暗含的矛盾

**【题目】**(2013年普通高等学校招生全国统一考试海南卷)某同学用图1所示的实验装置验证机械能守恒定律.已知打点计时器所用电源的频率为50 Hz,当地重力加速度  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ .实验中该同学得到一条点迹清晰的完整纸带.纸带上的第一个点

可以看出  $m_1 v_{1c} = -m_2 v_{2c}$ ,这说明在碰撞前,从质心系中观测质点1和2的动量是大小相等方向相反的,两者之和为零.

碰撞后,质点1和质点2相对于质心的动量为

$$m_1 \mathbf{u}_{1c} = \frac{em_1 m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 \mathbf{u}_{2c} = -\frac{em_1 m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

对于完全非弹性碰撞,  $e = 0$  时,有

$$m_1 \mathbf{u}_{1c} = m_2 \mathbf{u}_{2c} = 0$$

即两质点都静止在质心处,两者之和为零.

对于弹性碰撞,  $e = 1$  时,有

$$m_1 \mathbf{u}_{1c} = -m_2 \mathbf{u}_{2c}$$

即从质心系中观测质点1和2的动量,还是大小相等方向相反,两者之和为零.且  $m_1 \mathbf{u}_{1c} = m_2 \mathbf{v}_{2c}$ ,  $m_2 \mathbf{u}_{2c} = m_1 \mathbf{v}_{1c}$ ,这说明质心系中碰撞的两个物体,碰撞的效

果是两个物体的动量进行交换.

## 3 结束语

从质心系中看两体发生完全非弹性碰撞,碰后两物体都将静止在质心处.从质心系中看两体发生弹性碰撞,遵循如下规律:

(1) 从质心系中观测两个物体碰撞前后的速度时,其大小均不变,但是方向变为反向.

(2) 从质心系中观测两个物体的动量时,碰撞前后总动量始终为零,且碰撞的效果是两个物体的动量互换.

(3) 从质心系中观测两个物体的动能时,碰撞前后,两个物体的动能均不变.

## 参考文献

- 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程·力学.北京:高等教育出版社,2004.127~130

记为 $O$ ,另选连续的3个点 $A, B, C$ 进行测量,图1中给出了这3个点到 $O$ 点的距离 $h_A, h_B$ 和 $h_C$ 的值.回答下列问题(计算结果保留3位有效数字).

(1)打点计时器打 $B$ 点时,重物速度的大小 $v_B =$  \_\_\_\_\_ m/s;

(2)通过分析该同学测量的实验数据,他的实验结果是否验证了机械能守恒定律?简要说明分析的依据.

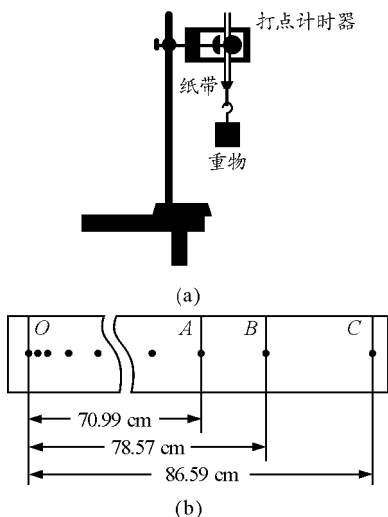


图1 验证机械能守恒定律装置示意图

显然可根据 $A$ 到 $C$ 的平均速度作为中间时刻的瞬时速度求出 $v_B = 3.90$  m/s,这里不再研究第2问,转而研究实验中体现的加速度.根据 $v^2 = 2gh$ ,及 $h_B = 0.7857$  m,可得 $g = 9.68$  m/s<sup>2</sup>,显然比理论值小的原因可以解释为阻力的影响,不算太严重.但从另一个观点求得的加速度出了问题:在此匀变速运动中应当满足 $h_{BC} - h_{AB} = gt^2$ ,其中 $t = 0.02$  s,以此逐差法求得 $g = 11$  m/s<sup>2</sup>.两种计算上应该都没问题,但是结果矛盾,参考文献[1]认为由这道题的相关数据既然可以算出如此不合理的加速度,所以是出错了题.虽然文献[1]用的是另一道数字不同的题干,但可见这种情况普遍存在,亟待合理的解释.

### 3 逐差法的认识

如果存在4段已知长度 $h_{AB}, h_{BC}, h_{CD}, h_{DE}$ ,就可以求重力加速度的平均值,利用 $h_{CD} - h_{AB} = 2gt^2$ 和 $h_{DE} - h_{BC} = 2gt^2$ 分别求出 $g$ 后相加除以2.为什么不

是相邻的两段相减求出3个 $g$ 值取平均呢?因为你会发现这样相加后消掉了 $h_{BC}, h_{CD}$ 的数据,误差更大的原因是使用的数据更少.对于海南卷中的这道题,用逐差法求加速度,方法正确但所用的数据范围过小( $A$ 至 $C$ 之间)也会导致大的误差存在,不妨就从测量误差来估计一下:根据刻度尺的最小分度,我们可以估计每个长度测量值的误差大小在 $0 \sim 0.0002$  m,而求 $g$ 的表达式为

$$g = \frac{(h_{OC} - h_{OB}) - (h_{OB} - h_{OA})}{t^2}$$

用到了4次测量值,估计分子的不确定度在 $0.0008$  m范围内,但观察分母为 $0.02^2$ ,相当于将此误差放大到2500倍,所以 $g$ 值的误差大小估计在 $0 \sim 2$ 之间,那么得到那样的数据就可以理解了.相比之下, $v^2 = 2gh$ 的观点则是用上了足够大范围的数据(从起点开始的位移),应该更具有说服力.

### 4 全位移算法的误差估计

根据 $B$ 点瞬时速度的来历 $v_B = \frac{h_{AC}}{2t}$ ,有

$$g = \frac{\left(\frac{h_{AC}}{2t}\right)^2}{2h_B}$$

即  $g = \frac{\left(\frac{0.8659 - 0.7099}{0.04}\right)^2}{2 \times 0.7857}$  m/s<sup>2</sup>

$h_{AC}$ 的误差范围 $-0.0004 \sim 0.0004$  m,  $h_B$ 的误差范围 $-0.0002 \sim 0.0002$  m,我们取误差的极值来研究, $g$ 的最大值( $h_{AC}$ 取加 $0.0004$  m的上限而 $h_B$ 取减 $0.0002$  m的下限)为 $9.7314$  m/s<sup>2</sup>左右,相应地最小值为 $9.6272$  m/s<sup>2</sup>,相比之下显然更加符合实际情况,所以其实文献中原题标准答案使用这种方法求重力加速度是正确而合理的,反而逐差法是正确而不够合理.由于两种算法只是用到位移而不用总时间,所以都不会受到 $O$ 点到第2个点的距离不等于 $0.00196$  m时,计时不等于加速时间的影响.即使我们再夸张一点,认为释放瞬间手抖了一下, $O$ 点速度刚好为加速 $0.02$  s的值: $0.196$  m/s,这种情况下 $v_B^2 - v_O^2 = 2gh_B$ ,显然取最小的 $v_B$ 和最大的

$h_B$  可求得最小的  $g = 9.6028 \text{ m/s}^2$ , 仍是可以接受的值. 使用全段位移相当于减小了有限的误差在整体中的百分比.

## 5 图像的观点

其实图像上求斜率可能是高中阶段最准确的数据处理方式了, 即使  $O$  点速度不为零也可以通过作  $v^2-h$  图像来避开, 因为  $v^2 = v_0^2 + 2gh$ , 斜率不受截距影响. 但题干给出的数据过少, 所以只能先按理论加速度  $9.8 \text{ m/s}^2$  来推算一下在  $A, C$  两点的速度分别为

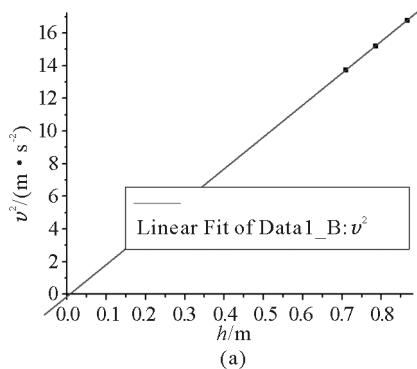
$$v_A = v_B - gt \quad v_C = v_B + gt$$

代入数据得

$$v_A = 3.704 \text{ m/s} \quad v_C = 4.096 \text{ m/s}$$

分别平方作为纵坐标, 再以 3 个点的下落高度  $h$  为横坐标作出了图 2 所示的直线拟合 (Origin 软件), 可见毕竟存在误差, 直线是不过原点的, 而下方的直线方程表达式  $y = A + Bx$  里, 斜率  $B$  即为  $2g$ , 可算得

$$g = 9.7997 \text{ m/s}^2$$



[2017-11-11 08:22 "/>Graph1" (2458068)]		
Linear Regression for Data1_B:		
Y = A + B * X		
Parameter	Value	Error
A	-0.19241	0.02749
B	19.59943	0.03481

图 2  $v^2-h$  直线拟合图像及相关的数字

这当然跟我们用  $9.8 \text{ m/s}^2$  的加速度去反推在  $A, C$  点的速度有关, 所以第 2 次用计算值  $g = 9.68 \text{ m/s}^2$ , 求得

$$v_A = 3.7064 \text{ m/s}$$

$$v_C = 4.0936 \text{ m/s}$$

再次作图 (图未显示) 后得到新的直线方程表达式如图 3 所示, 算得

$$g = 9.67969 \text{ m/s}^2$$

虽然这个值基本上也是默认加速度为  $9.68 \text{ m/s}^2$  而得到的, 但仔细观察这两个直线方程的截距, 第 2 次的  $-0.00408 \text{ m}^2/\text{s}^2$  极小, 明显更加过原点了, 说明加速度为  $9.68 \text{ m/s}^2$  是可信的, 因为一般保持在  $O$  点速度为零并非难事.

[2017-11-11 11:00 "/>Graph3" (2458068)]  
Linear Regression for Data1\_B:  
Y = A + B \* X

Parameter	Value	Error
A	-0.00408	0.02987
B	19.35938	0.03783

图 3 第 2 次作图后得到的数据

再仔细思考一下, 这两次直线的截距都是负值, 显然不能对应任何  $O$  点的初速度, 应该是源于那几个测量数据的误差; 负的截距会导致偏大的斜率, 说明这几个数据点本身就可能会造成加速度测量值比真实值 (或者说是均值) 偏大, 而如果这个误差再集中在小尺度范围内被放大 (一次逐差的计算), 是否在一定程度上支持了那个  $g = 11 \text{ m/s}^2$  的出现呢? 但是与文献 [1] 中一样, 逐差计算值都不是偏小而是偏大很多, 深层原因还有待广大同仁进一步研究.

## 6 总结

实验是不容作假的, 通常出题也会尊重事实; 打点计时器的内容我们研究的很多, 用来求重力加速度其精度还可以接受, 通常编成习题时没必要在数字上再进行处理. 逐差、全程、作图都是正确的求重力加速度的观点, 只是偶然误差在小范围的数据中体现得更加明显一些, 由此即认为题目出错是值得商榷的. 虽然这里的推导也很不严密, 但从多个角度去理解实验事实, 不失为一种科学的研究手段.

## 参考文献

- 1 雷铁飞. 由一道“纸带问题”引起的思考. 物理通报, 2017, 36(11): 75 ~ 76, 85