乒乓球“过网”并“上台”再讨论

施　媛　　徐正海
（当涂第一中学　安徽 马鞍山　243100）

（收稿日期:2017－11－30）

摘　要:通过对2015年全国高考新课标卷Ⅰ(理综)第18题中乒乓球“过网”并“上台”的问题再讨论,试图找到更为简明的逻辑推理过程.

关键词:乒乓球　平抛　临界高度　擦网　擦边　最大取值范围

笔者在2018届高三物理第一轮的“抛体运动”复习中,遇到了理论联系实际的乒乓球“过网”并“上台”的运动,其中2015年全国高考新课标Ⅰ卷(理综)中有一道经典题,在参阅了王老师关于“乒乓球在球网右侧台面的逻辑推理与引申讨论”一文[1]后,虽然受益匪浅,但是在课堂上还是难以有条不紊地表达这一思路.为此,笔者斟酌再三,突破思维盲点,采用数理结合的单线推理方式,较好地达到了教学目的.

【原题】一带有乒乓球发射机的乒乓球台如图1所示.水平台面的长和宽分别为L_1和L_2,中间球网高度为h.发射机安装于台面左侧边缘的中点,能以不同速率向右侧不同方向水平发射乒乓球,发射点距台面高度为$3h$.不计空气的作用,重力加速度大小为g.若乒乓球的发射速率v在某范围内,通过选择合适的方向,就能使乒乓球落到球网右侧台面上,则v的最大取值范围是(　　)

A. $\frac{L_1}{2}\sqrt{\frac{g}{6h}}<v<L_1\sqrt{\frac{g}{6h}}$

B. $\frac{L_1}{4}\sqrt{\frac{g}{h}}<v<\sqrt{\frac{(4L_1^2+L_2^2)g}{6h}}$

C. $\frac{L_1}{2}\sqrt{\frac{g}{6h}}<v<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4L_1^2+L_2^2)g}{6h}}$

D. $\frac{L_1}{4}\sqrt{\frac{g}{h}}<v<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4L_1^2+L_2^2)g}{6h}}$

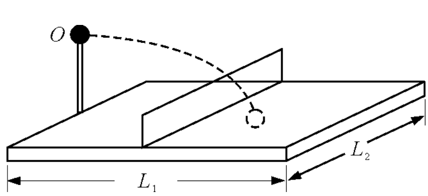

图1　原题题图

该题让发射机“平击”乒乓球,忽略乒乓球的旋转,视之为平抛运动.首先让我们来揭示一下乒乓球在既要“过网”又要“上台”运动中,隐藏着一个“临界高度”的核心话题.

1　一个临界高度区间

如图2所示,是发射机发球的示意图.

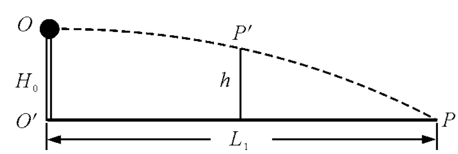

图2　发射机发球示意图

台面左侧边缘中点发射机,存在某一发射高度H_0,当将乒乓球从O点以某一初速v_0水平发射时,球的飞行轨迹线正好“擦网”P'点而过,并且“擦边”P点而落.换言之,倘若发球速度要是大于或是小于这一初速v_0,球就要么出台或要么落网.因此,有擦网关系式

$$H_0-h=\frac{1}{2}gt_1^2$$

$$\frac{L_1}{2}=v_0t_1$$

以及擦边关系式

$$H_0=\frac{1}{2}gt_2^2$$

$$L_1=v_0t_2$$

联立两式得到

$$H_0=\frac{4}{3}h$$

显而易见,在$\angle MO'N$区间内,上述结论通用,如图

3 所示.

2　动态临界高度区间

在上述 $\angle MO'N$ 区间外，发球的临界高度 H_0' 要另当别论，为了方便，只讨论半边球台. 在图 3 中，记 $\angle PO'Q=\theta$.

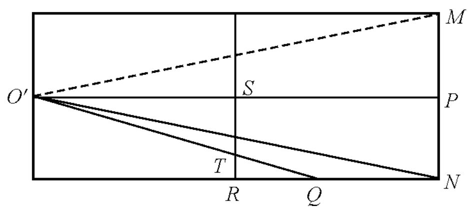

图 3　量值间关系图

同上理，有

$$H_0'-h=\frac{1}{2}gt_1^2$$

$$\frac{L_1}{2\cos\theta}=v_0t_1$$

以及

$$H_0'=\frac{1}{2}gt_2^2$$

$$\frac{L_2}{2\sin\theta}=v_0t_2$$

整合有

$$H_0'=\frac{h}{1-\left(\dfrac{L_1}{L_2}\tan\theta\right)^2}$$

该式告诉我们，其临界高度是动态的，且随 θ 的增大而增大，当以 $H_0'=3h$ 作为临界高度时，则

$$\tan\theta_0=\frac{\sqrt{6}L_2}{3L_1}$$

故在 $\arctan\dfrac{L_2}{2L_1}<\theta<\arctan\dfrac{\sqrt{6}L_2}{3L_1}$ 区间内，乒乓球也是可以“过网”并“上台”的，即在 $\angle NO'Q$ 区间内，发球过网上台的临界高度为 $\dfrac{4}{3}h<H'_0<3h$.

3　讨论三区间

原题中“通过选择合适的方向，使乒乓球落到球网右侧台面上，求解的最大取值范围”，可归纳讨论为：

(1) 在 $\angle PO'N$ 区间内，由于 $H=3h>\dfrac{4h}{3}$ 满足过网上台的必要条件，而且乒乓球擦网上台的发射速度一定小于其相应过网擦边的发射速度. 另一方面，因为 $O'S=\dfrac{L_1}{2}$ 为球擦网上台的最小水平位移，所以最小的发球速度

$$v_1=\frac{L_1}{4}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

同时，这个区间过网擦边球的最大水平位移是

$$O'N=\sqrt{L_1^2+\left(\frac{L_2}{2}\right)^2}$$

故最大的发球速度

$$v_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4L_1^2+L_2^2)g}{6h}}$$

(2) 在 $\angle NO'Q$ 区间内，由于 $H=3h$ 也满足过网上台的发射高度，因此，擦网上台的发球速度依然会小于其过网擦边的发球速度，与(1) 结论比较明显见得，这个区间的最小擦网上台的发球速度大于 v_1；最大过网擦边的发球速度小于 v_2. 于是综合结论得出，乒乓球“过网”并“上台”的发球速度的最大取值范围是选择项 D.

(3) 在 $\angle QO'R$ 区间内，由于其临界高度大于 $3h$，故 $H=3h$ 的发射机向这个区域发射乒乓球，不论发球速度是快是慢，球都不可能打到右侧台面上的这个三角区域($\triangle QRT$ 为其中之一)，即速度过小会“落网”，速度过大会“落地”，我们称之为“无球三角区”. 需要说明一点的是，这种讨论结果对于乒乓高手打出的“弧旋球”是没有指导意义的.

4　结束语

“乒乓球”走进“高考”是一个蛮有趣的话题，这也是 STSE 教育思想进一步落实的具体体现. 总之，对于这道高考题思维的来龙去脉，笔者认为，只要先把握“过网”并“上台”的临界高度，再分区间地找出它们之中的数理关系，就可以顺理成章地厘清问题的本质.

参考文献

1　王松涛. 乒乓球在球网右侧台面的逻辑推理与引申讨论. 物理通报，2016(1)：47 ～ 50

(下转第 59 页)

式(5) 继续对时间 t 求偏导,得到

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

定义一个矢量 $C=(v^TFv,v^TGv)$,那么(8)、(9) 两式可以写成矩阵形式

$$t=0$$

$$Aa=-a_{\mathrm{cur}}-2Bv-C \tag{10}$$

于是两个时变曲线交点的视觉加速度有形式意义上的解

$$a=-A^{-1}a_{\mathrm{cur}}-2A^{-1}Bv-A^{-1}C \tag{11}$$

式(7) 和式(11) 就是两个时变曲线交点的视觉速度和加速度的一般表达式.

以上处理方法的一个好处是很容易能推广到 3 个时变曲面交点的视觉速度和加速度计算,不需要画图. 我们以一个具体的例子来说明如何计算. 设有两个时变平面和一个时变球面,它们的方程是

$$\begin{cases}3x+4y+5z=t^2+12\\ x^2+y^2+z^2=t^2+3\\ 2x+(t+1)y+3z=6\end{cases} \tag{12}$$

上式两边对时间求导,得到

$$\begin{cases}3v_x+4v_y+5v_z=2t\\ xv_x+yv_y+zv_z=2t\\ 2v_x+(t+1)v_y+3v_z=-y\end{cases} \tag{13}$$

在时间 $t=0$ 时 3 个面的交点坐标是(1,1,1),代入式(13),解得交点的视觉速度为

$$v_x=-\frac{1}{3}\qquad v_y=\frac{2}{3}\qquad v_z=-\frac{1}{3} \tag{14}$$

式(13) 继续对时间求导,得到

$$\begin{cases}3a_x+4a_y+5a_z=2\\ xa_x+ya_y+za_z+v_x^2+v_y^2+v_z^2=2\\ 2a_x+(t+1)a_y+3a_z=-2v_y\end{cases} \tag{15}$$

代入 $t=0$ 时交点的坐标和视觉速度,计算得到此时交点的视觉加速度为

$$a_x=\frac{4}{3}\qquad a_y=2\qquad a_z=-2 \tag{16}$$

现在数学符号计算软件非常发达,很容易编程计算以上表达式. 有兴趣的读者不妨利用本文的方法和结论来出一些相关的物理竞赛模拟题.

参考文献

1 徐斌. 两运动曲线交点速度的探究. 物理教师,2014,35(2):60 ~ 61

2 李卫平. 平面内两运动光滑曲线交点速度计算之速度分解-合成法的证明及应用举例. 物理教师,2010,31(4):29 ~ 31

3 齐德江,李卫平. 平面上两平动光滑曲线交点速度的最简求法 —— 速度分解-合成法. 物理教师,2004,25(9):59 ~ 61

(上接第 52 页)

Re - discussion on Ping - pong′s *Being Over the Net and Going to the Table* Issue

Shi Yuan Xu Zhenghai

(DangtuNo. 1 Middle School,Maanshan,Anhui 243100)

Abstract:This paperre - discusses the Ping - Pong′s "being over netand on table" issue, which is the 18th question of the integrated test in science of the 2015 National College Entrance Examination(new curriculum standard),and tries to find a more concise logic reasoning process.

Key words:ping - pong;horizontal projection;critical altitude;skim the net;edge collision;maximum value range