

# 半波带法研究夫琅禾费单缝衍射的局限性分析\*

董 鹏 张立红

[中国石油大学(华东)理学院基础物理系 山东 青岛 266580]

(收稿日期:2017-12-20)

**摘要:**本文对半波带法研究夫琅禾费单缝衍射的局限性进行了分析.在半波带法的基础上对单缝波阵面进行了更精细的分割,采用振幅矢量图解法对半波带法给出的明纹条件进行了修正,修正后的明纹条件表明,决定单缝衍射明纹振幅的不足一个半波带,而并非恰好一个半波带.同时,利用该方法还得到了衍射光强,与积分法求解衍射光强相比,这一方法在物理上更直观,在数学上更简洁.此外,与半波带法对单缝波阵面进行有限分割相比,该方法充分体现了衍射现象和干涉现象之间的区别和所采取的计算方法的不同,更有利于学生加深对衍射本质的理解.

**关键词:**夫琅禾费单缝衍射 半波带法 振幅矢量图解法

## 1 引言

在大学物理课程中,对于夫琅禾费单缝衍射这一内容,一般采用两种方法展开研究,一是积分法,即利用菲涅耳衍射积分公式严格求解衍射光强,从而全面了解单缝衍射的光强分布规律;二是半波带法,即通过半波带法定性分析明暗条纹出现的衍射角条件,从而获取衍射图样的主要特征.积分法由于计算复杂一般作为选学内容,或者仅对方法作简单介绍并直接给出计算结果,而对计算过程不作详细研究.半波带法因构思巧妙、物理图像直观而被作为讨论分析的重点.然而,作为一种粗视化分析方法,半波带法存在局限性,首先,通过与积分法严格求解得到的结果对比发现,半波带法在确定明纹出现的衍射角条件时存在误差,即仅能给出明条纹出现的近似条件;其次,半波带法无法给出衍射光强表达式,即通过半波带法不能确定观察屏上任意点的光强分布;再次,半波带法不能充分体现衍射现象与干涉现象之间的区别.

赵凯华先生在其编写的面向物理专业本科生的

光学教材<sup>[1]</sup>中,在菲涅耳圆孔衍射部分,对半波带法进行了补充:对于圆孔内包含非整数个半波带的情形,采用振幅矢量图解法对半波带进行了细致处理,由此求解了衍射场的振幅;在夫琅禾费单缝衍射部分,没有采用半波带法进行定性分析,直接采用振幅矢量图解法和积分法严格求解了衍射光强分布公式.在面向非物理专业的大学物理教材中,由于夫琅禾费衍射计算简单且应用广泛,一般仅讲授夫琅禾费衍射,而且把直观的半波带法作为讨论分析夫琅禾费单缝衍射的重点方法,然而并不指出半波带法存在的误差<sup>[2-5]</sup>,或者仅对这一误差做一标注,不进行说明或展开解释<sup>[6]</sup>.

本文将在半波带法的基础上对单缝波阵面进行了更精细的分割,采用振幅矢量图解法讨论明暗条纹条件,修正半波带法所给出的明纹条件公式.同时,利用该方法定量求解单缝夫琅禾费衍射光强表达式.由于该方法将单缝波阵面从有限个半波带进一步细分成无限个窄波带,这一处理充分体现了衍射现象和干涉现象之间的区别和所采取的计算方法的不同.

\* 中国石油大学(华东)重点教改项目,项目编号:JY-A201618;中国石油大学(华东)2015年来华留学英语授课品牌课程项目.

作者简介:董鹏(1980-),女,博士,讲师,主要从事大学物理教学和非线性光纤光学研究工作.

## 2 半波带法局限性分析

波长为  $\lambda$  的准单色平行光垂直照射于宽度为  $a$  的单缝上,为求得单缝后理想透镜  $L$  的后焦面上某点  $P$ (对应衍射角  $\varphi$ ) 的合成振幅,我们设想把单缝处的波面分割成一些等宽的子波带,使每一子波带两边缘的子波到达  $P$  点时的光程差均为  $\frac{\lambda}{2}$ ,因此这些子波带被称为半波带,如图 1 所示.由于各半波带的面积相同,且任意两相邻半波带上对应点的子波到达  $P$  点时的相位差为  $\pi$ ,所以两相邻半波带在  $P$  点的振动将互相抵消,或者说,相邻两半波带对  $P$  点合振幅的贡献为零.

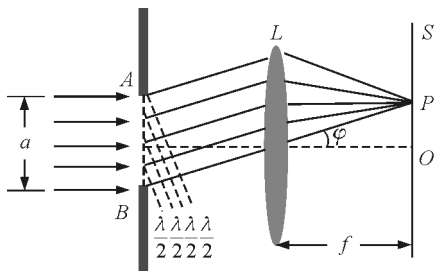


图 1 半波带法分析单缝夫琅禾费衍射示意图

若单缝处的波阵面恰好被分成偶数个半波带,则  $P$  点的合振幅为零,  $P$  点处为衍射暗纹,因此暗纹出现的衍射角条件为

$$a \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (1)$$

(考虑衍射角  $\varphi$  关于主光轴对称,上式的严格表达应为  $a \sin \varphi = \pm 2k \left( \frac{\lambda}{2} \right)$ ,简单起见,在此省略“ $\pm$ ”号,下同).

若单缝处的波阵面恰好被分成奇数个半波带,因相邻两半波带在  $P$  点的振动相互抵消,剩下的一个半波带发出的光未被抵消,会聚于  $P$  点,形成亮点,故  $P$  点处为明纹,因此明纹出现的衍射角条件为

$$a \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (2)$$

将半波带法给出的明暗条纹条件与积分法严格求解得到明暗条纹条件对比,发现半波带法给出的暗条纹条件是精确的,而明条纹条件则不然.

下面我们将式(2)给出的明纹条件与积分法严格求解得到的明纹条件<sup>[2]</sup>分别列出,如表 1 所示.

表 1 半波带法与积分法给出的明纹衍射角条件对比

衍射级数	积分法	半波带法
$k=1$	$a \sin \varphi = \pm 1.43 \lambda$	$a \sin \varphi = \pm 1.50 \lambda$
$k=2$	$a \sin \varphi = \pm 2.46 \lambda$	$a \sin \varphi = \pm 2.50 \lambda$
$k=3$	$a \sin \varphi = \pm 3.47 \lambda$	$a \sin \varphi = \pm 3.50 \lambda$
$k=4$	$a \sin \varphi = \pm 4.48 \lambda$	$a \sin \varphi = \pm 4.50 \lambda$

将表 1 中的数据对比发现,半波带法给出的明纹条件与精确值存在偏差.具体来讲,由半波带法分析得出的明纹衍射角总是略大于积分法求得的明纹衍射角,在  $k$  值较小时差别较明显,随着  $k$  值的增大逐渐趋近精确值,这说明半波带法仅能给出明纹出现的近似条件.

## 3 振幅矢量图解法剖析半波带法明纹条件的近似性

半波带法是以使相邻子波带产生  $\frac{\lambda}{2}$  的光程差为最小单元对单缝波面的分割,即

$$N = \frac{a \sin \varphi}{\frac{\lambda}{2}}$$

由此给出了明暗条纹出现的条件

暗纹  $N = 2k$ ;

明纹  $N = 2k+1, (k=1,2,3,\dots)$ .

然而由于衍射角  $\varphi$  是连续变化的,因此  $N$  也会随之连续变化,即  $N$  不应局限于整数.半波带法仅考虑了  $N$  是整数的情况,即仅对某些特定衍射角(使得单缝波面恰好被分成整数个半波带)做了分析,而没有针对任意衍射角作一般分析.半波带法对单缝波面的这一粗视化分割使得对明纹条件的判断不够精确,下面在半波带法的基础上对单缝波面进行更精细化的分割,并采用振幅矢量图解法来分析明暗条纹条件.

仿效半波带法,将单缝从其上边缘  $A$  开始,划分为一系列等宽度的细缝,直至其下边缘  $B$ ,如图 2(a) 所示.每个细缝作为子波源对  $P$  点贡献一个小振动,用一个小矢量表示,矢量大小表示振动振幅,矢量方

向表示相位;这一系列小矢量长度相等,但取向依次变动,当单缝被分得足够精细时,这些小矢量首尾相接形成光滑的圆弧 $\widehat{AB}$ ,如图2(b)所示.这段圆弧 $\widehat{AB}$ 在起点A与终点B的两条切线间夹角 $\Delta\theta$ 即代表了A边与B边贡献的两个小振动之间的相位差,而 $\Delta\theta$ 则取决于从单缝A边和B边发出的两条光线的光程差 $a \sin \varphi$

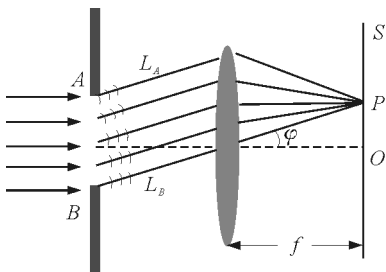
$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \varphi$$

当 $\varphi=0$ 时, $a \sin \varphi=0, \Delta\theta=0$ ,所有的小矢量方向相同,小矢量之间首尾相接排成直线,矢量和的大小记为 $A_0, A_0$ 即为等光程方向的子波束相干叠加而产生的衍射振幅,如图2(b)所示,此时,接收屏上P点为中央明纹.由于这种情况下的矢量和的大小相当于将 $\varphi \neq 0$ 时的圆弧 $\widehat{AB}$ 拉直,因此容易理解弧长 $\widehat{AB}$ 与 $A_0$ 的关系为 $\widehat{AB} = A_0$ .

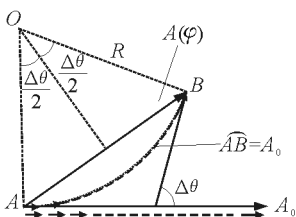
当 $a \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2}, (k=1, 2, 3, \dots)$ ,即光程差恰好包含 $2k$ 个半波带时, $\Delta\theta=2k\pi$ ,此时小矢量首尾相接恰好构成圆,且圆的层数是 $k$ ,如图2(c)所示(为清楚起见,图中仅画出了2层,对应 $k=2$ ).此时,由于所有小矢量相加所得总矢量为零,因此对应的P点为暗纹,因此,暗纹条件为

$$a \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

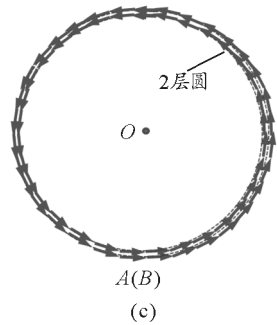
这与半波带法得到的结果一致.



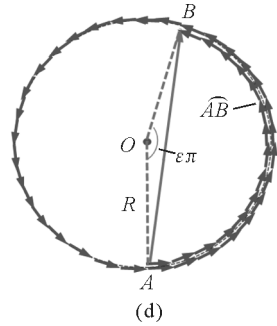
(a)



(b)



(c)



(d)

图2 振幅矢量图解法分析单缝夫琅禾费衍射示意图

当 $a \sin \varphi = (2k + \epsilon) \frac{\lambda}{2}, (0 < \epsilon < 2, k=1, 2, 3, \dots)$ 时,即光程差包含 $2k$ 个半波带以及 $\epsilon$ 个半波带, $\epsilon$ 取 $(0, 2)$ 范围内任意值.此时, $\Delta\theta = (2k + \epsilon) \pi$ ,小矢量首尾相接构成 $k$ 层圆以及不足一个整圆的圆弧 $\widehat{AB}$ ,如图2(d)所示(清楚起见,图中仅画了一层整圆和圆弧 $\widehat{AB}$ ,对应 $k=1$ ). $k$ 层圆对应圆心角 $2k\pi$ ,圆弧 $\widehat{AB}$ 对应圆心角 $\epsilon\pi$ .构成 $k$ 层圆的小矢量的合矢量为零,构成圆弧 $\widehat{AB}$ 的小矢量的合矢量大小 $\widehat{AB}$ 决定了衍射场点P的振幅,当振幅最大时,点P处为亮纹.

由图2(d)中的几何关系可知:圆心角 $\angle AOB = \epsilon\pi$ ,圆半径 $R = \frac{\widehat{AB}}{\epsilon\pi}$ .又知图中所有振幅小矢量首尾相接构成的总弧长为 $A_0$ ,其所对应圆心角为 $(2k + \epsilon) \pi$ ,因此根据比例关系有 $\frac{\widehat{AB}}{\epsilon\pi} = \frac{A_0}{(2k + \epsilon) \pi}$ ,

所以,圆弧 $\widehat{AB} = \frac{\epsilon}{2k + \epsilon} A_0$ . P点的振幅计算为

$$A = 2R \sin \frac{\epsilon\pi}{2} = 2 \frac{\widehat{AB}}{\epsilon\pi} \sin \frac{\epsilon\pi}{2} = A_0 \frac{\sin \frac{\epsilon\pi}{2}}{k\pi + \frac{\epsilon\pi}{2}} \quad (3)$$

可见P点的振幅A为 $\epsilon$ 的函数.下面我们将上式两边对 $\epsilon$ 求导,得

$$\frac{dA}{d\epsilon} = \frac{A_0}{2k + \epsilon} \cos \frac{\epsilon\pi}{2} - \frac{2A_0}{(2k + \epsilon)^2 \pi} \sin \frac{\epsilon\pi}{2}$$

当  $\frac{dA}{d\epsilon} = 0$  时,  $P$  点的振幅  $A$  取极值. 因此, 令上

式为零, 求得

$$\tan \frac{\epsilon\pi}{2} = k\pi + \frac{\epsilon\pi}{2}$$

上式为超越方程, 可以采用作图法来定解. 下面列出部分解.

表2 超越方程  $\tan \frac{\epsilon\pi}{2} = k\pi + \frac{\epsilon\pi}{2}$  的解

$k$ 值	$\epsilon$ 值
$k = 1$	0.861
$k = 2$	0.918
$k = 3$	0.942
$k = 4$	0.955

当  $\epsilon$  取上述值时,  $P$  点的振幅  $A$  取极值(极大值或极小值). 根据图 2(d) 容易判断  $A$  的最小值发生在  $\epsilon = 0$  处, 为  $A_{\min} = 0$ , 因此  $\epsilon$  取表中的数值时,  $P$  点的振幅  $A$  取极大值,  $P$  点为明纹. 根据表中数据可判断,  $\epsilon$  的取值范围为  $0 < \epsilon < 1$ , 且随着  $k$  值的增大,  $\epsilon$  愈加趋向于 1. 由此, 我们得到明纹条件为

$$a \sin \varphi = (2k + \epsilon) \frac{\lambda}{2},$$

$$(0 < \epsilon < 1, k = 1, 2, 3, \dots) \quad (k \text{ 增大}, \epsilon \rightarrow 1)$$

(4)

将表 2 中的  $\epsilon$  值代入上式, 并与表 1 中积分法给出的结果比较发现, 两者非常一致, 这说明上述方法由于在半波带法的基础上对单缝波阵面进行了更加精细的分割, 从而克服了半波带法的局限性, 精确地确定了明纹条件.

进一步分析上述式(4), 发现明纹产生在单缝波阵面包含  $2k$  个半波带和  $\epsilon$  个半波带的条件下,  $\epsilon$  不足 1 但接近于 1. 由于前  $2k$  个半波带对  $P$  点振幅的贡献为零, 因此, 可以说决定单缝衍射明纹振幅的不足一个半波带, 而并非恰好一个半波带. 对此, 可以结合振幅矢量图解法加以理解. 如图 3 所示, (a) 图为单缝波阵面包含  $(2k + \epsilon)$  个半波带的情况, (b) 图为单缝波阵面包含  $(2k + 1)$  个半波带的情况. (a)

图中, 决定衍射明纹振幅的是弦长  $\overline{AB}_a$ , (b) 图中, 决定衍射明纹振幅的是直径  $\overline{AB}_b$ . 令两图中圆的半径分别为  $R_a, R_b$ , 则

$$R_a = \frac{A_0}{(2k + \epsilon)\pi}$$

$$R_b = \frac{A_0}{(2k + 1)\pi}$$

由于  $\epsilon < 1$ , 所以  $R_a > R_b$ . 又因为弦长  $\overline{AB}_a$  接近于直径  $2R_a$  (因为圆心角  $\epsilon\pi \rightarrow \pi$ ), 所以大圆中的弦长  $\overline{AB}_a$  大于小圆中的直径  $\overline{AB}_b$  是可能的.

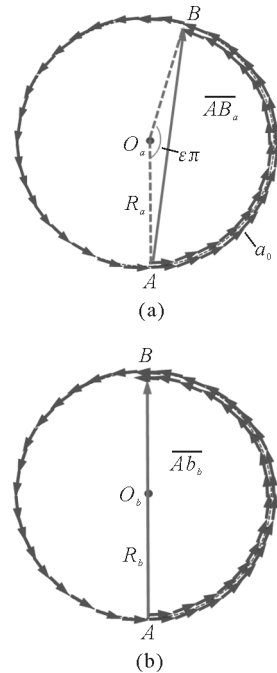


图3 单缝波面分成  $(2k + \epsilon)$  个半波带和  $(2k + 1)$  个半波带两种情况下的衍射场振幅大小定性分析

#### 4 振幅矢量图解法求解衍射光强

$$\text{由} \quad a \sin \varphi = (2k + \epsilon) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{得} \quad \epsilon = \frac{2a \sin \varphi}{\lambda} - 2k$$

将之代入式(3), 并考虑光强  $I = A^2$  得

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}}{\left( \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda} \right)^2} \quad (5)$$

这里,  $I_0 = A_0^2$ , 是  $\varphi = 0$  (等光程方向) 的子波源相干叠加的衍射光强, 它在公式中作为一个参考值, 用于度量  $\varphi \neq 0$  (非等光程方向) 的衍射光强. 该式与采

用积分法得到的光强表达式完全一致。

上面采用振幅矢量图解法推导出了单缝夫琅禾费衍射光强表达式,与积分法推导衍射光强表达式相比,这一方法避免了复杂的积分运算,物理思路简单,易于学生接受。

## 5 结论

本文首先通过对比半波带法与积分法所给出的明暗条纹出现的衍射角条件,指出了半波带法在判断明纹条件时存在方法误差。通过将粗视化的半波带法精细化,即对单缝波阵面进行更精细化分割,采用振幅矢量图解法讨论了明纹条件,修正了半波带法所给出的明纹条件公式。修正后的明纹条件表明决定单缝衍射明纹振幅的不足一个半波带,而并非恰好一个半波带。同时,利用该方法还求得了与积分法一致的衍射光强表达式。此外,由于该方法将单缝波阵面从有限个半波带进一步细分成无限个窄波带,接收屏  $P$  点的衍射光强即为从无限个窄波带发出的子波的相干叠加,因此这一方法体现出了衍射

现象与干涉现象的区别,有利于学生加深对衍射现象本质的理解。

振幅矢量图解法已在大学物理的先修内容——简谐振动部分学习到,在此再次使用这一方法来分析单缝夫琅禾费衍射,有利于学生通过关联和对比加深对两部分内容的理解,也更突显了物理方法在大学物理教学中的重要性。

## 参考文献

- 1 赵凯华. 新概念物理教程·光学. 北京:高等教育出版社, 2004. 171 ~ 182
- 2 贾瑞泉. 大学物理教程. 北京:科学出版社, 2010. 262 ~ 267
- 3 上海交通大学物理教研室. 大学物理教程. 上海:上海交通大学出版社, 2010. 249 ~ 252
- 4 黄时中, 倪致祥. 大学物理(下). 北京:高等教育出版社, 2014. 263 ~ 264
- 5 宋士贤, 文喜星, 吴平. 工科物理教程(下). 西安:西北工业大学出版社, 2003. 681 ~ 683
- 6 张三慧. 大学物理学. 北京:清华大学出版社, 2009. 210 ~ 215

# Analysis on Limitations of the Half – wave – strip Method in Studying Fraunhofer Single – slit Diffraction

Dong Peng Zhang Lihong

(Chian University of Petroleum(East Chian), College of Science,  
Department of Fundamental Physies, Qingdao, Shandong 266580)

**Abstract:** This article analyzed the limitations of the half – wave strip method in studying single – slit Fraunhofer diffraction. The single – slit wave front was further sliced into fine strips on the basis of the slicing according to half – wave strip method, based on which graphic method of amplitude vector was adopted to modify the bright fringe condition given by the half – wave strip method. The modified bright fringe condition indicates that the bright fringe amplitude of single – slit diffraction is determined by less than one half – wave strip other than exactly one half – wave strip. Meanwhile, the diffraction intensity was also obtained applying this method, which is more intuitive in physics and simple in mathematics. Moreover, compared with the half – wave strip method in which the single – slit wave front is sliced into limited strips, this method also completely embodies the distinction between diffraction phenomena and interference phenomena and the difference in their studying methods, which is more helpful for students to deepen the comprehension on essence of diffraction.

**Key words:** Fraunhofer single – slit diffraction; half – wave strip method; graphic method of amplitude vector