

叠加原理在力学中的应用

丁学成 冯晓敏

(河北大学物理科学与技术学院 河北 保定 071000)

宋增云

(陆军步兵学院石家庄校区军政训练系 河北 石家庄 050083)

(收稿日期:2018-01-11)

摘要:叠加原理在中学阶段用有限项加和的形式表示,大学阶段用无穷多项加和的形式表示,对应的数学语言分别为加法和定积分.利用将加法运算推广到定积分计算,实现叠加原理的应用从中学到大学的顺利过渡.给出了力学中叠加原理的3种具体表述形式,并通过实例详述了叠加原理在力学中的应用,体现了微积分思想和方法在力学中的重要作用.

关键词:叠加原理 力学 定积分

1 引言

力学课程是物理学及相关专业学生步入大学后的第一门物理课程,是大学物理与中学物理的衔接课程,具有承上启下的作用,在培养学生学习研究物

理问题的基本方法方面起着重要作用^[1],学生对力学课程的学习效果对后继物理课程的学习至关重要.力学课程以牛顿定律为纲研究机械运动的3种形式.叠加原理贯穿着整个力学课程,包括中学和大学力学两部分^[2,3].中学阶段,叠加原理用加法来

2 贾宏志,郑继红,徐伯庆.工程教育专业认证背景下光电专业物理光学教学探讨.教育教学论坛,2017(1):160~161

3 毛少娟,陈玉丹,殷建玲.基于MATLAB的物理光学仿真.教育教学论坛,2016(44):100~102

Exploration on Physics Optics Course Teaching based on Virtual Simulation

Qian Yixian Ren Zhijun

(College of mathematical and information engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004)

Abstract: Physics optics course is a very professional and required theory course for undergraduate students. It has the characteristics of abstract and bladness, which brings many difficulties in teaching. Aiming at the above characteristics, the paper mainly discusses the visual virtual simulation of physics optics based on VirtualLab software. Those complex and abstract concepts can be shown by using a simple optical modeling, so that we can improve students' learning interest and learning effect, also improve the teaching level of physical optics curriculum.

Key words: physics optics; virtual simulation; virtualLab software; teaching reform

实现;而大学阶段,叠加原理用定积分实现.通过加法运算和定积分计算的关系可以实现中学与大学力学知识的衔接;利用积分思想和方法解决力学问题,即叠加原理思想和方法的运用,是力学课程的一个重要课题.因此,对叠加原理的理解和应用在力学课程中是非常重要的.

本文从叠加原理和定积分的概念出发,讨论了叠加原理与定积分的对应关系,给出了叠加原理的3种表述形式,并举例说明.

2 定积分的概念和叠加原理

定积分的概念可以用数学公式^[4]表示为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

其中 $i=1, 2, \dots, n$, $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, ξ_i 为每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的任取一点 ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$). 从式(1)可以看出,定积分是无穷多项的和.力学中研究的问题主要是线性问题,满足线性叠加原理,在数学物理中叠加原理可以表述为几种不同原因的综合所产生的效果,等于这些不同原因单独产生效果的累加^[5].在力学中叠加原理包含以下3种含义:

(1) 力在研究的整个空间(或整个时间间隔)内的积累效果等于力在每一个小的空间(或小的时间间隔)积累效果的叠加;

(2) 两个或多个力(或力矩)的作用效果等于每个力(或力矩)的作用效果的和;

(3) 质点系(或刚体)的作用等于各个质点(或质元)作用的和.

以上这3层含义中都体现了加和,在大学阶段一般以无穷多项加和形式出现.叠加原理与定积分概念均体现无穷多项加和,所以大学阶段用定积分表示叠加原理.

3 叠加原理在质点力学中的应用

质点力学是力学的开篇内容,是从中学到大学过渡部分.在利用叠加原理研究力的作用效果时,中学阶段,物体一般受到两个或多个恒力作用,利用

加法就可以实现.而大学阶段,物体受到的力一般为变力,即 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x)$ 或 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$,需要用定积分来实现.为实现顺利过渡,就要让学生理解变力作用体现了无穷多项加和的含义.

在中学阶段,一个质点在 n 个恒力连续作用下做的功 A 可以用数学公式表示为

$$A = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (2)$$

其中 \mathbf{F}_i 为质点在第 i 个小位移 $\Delta \mathbf{r}_i$ 范围内受到的力, $i=1, 2, \dots, n$.到了大学阶段,力 \mathbf{F} 是位置的函数,以一维问题为例,如 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x)$,可以把连续作用的变力 $\mathbf{F}(x)$ 看成多个恒力的作用,第 i 个恒力记作 $\mathbf{F}(\xi_i)$,作用的空间范围(小位移)记作 Δx_i , ξ_i 为每个小空间范围 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的任取一点 ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$), $i=1, 2, \dots, n$.这时变力 $\mathbf{F}(x)$ 做的功 A 可以写成

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i \quad (3)$$

为了得到精确的恒力,要求力作用空间范围无限小,即 $\Delta x_i \rightarrow 0$,则式(3)可以写成

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i \quad (4)$$

其中, $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$,式(4)表示无穷多项加和,可以写成定积分形式,即

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (5)$$

其中积分上下限 a 和 b 分别对应于质点的始末两态的位置,这就是大学物理力学中给出的功的积分形式定义式.

利用叠加原理的不同数学表述形式,即加法与定积分,可以实现中学到大学物理量计算的衔接.如计算力(力矩)对时间积累问题,中学阶段,物体在不同的时间间隔内受到不同的恒力作用,在第 i 个时间间隔内 Δt_i 受到的恒力为 \mathbf{F}_i ,则冲量 $\mathbf{p} =$

$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \Delta t_i$ ($n=1, 2, \dots, n$);大学阶段,力是时间的函

数 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$,则冲量可以表示为 $\mathbf{p} = \int_0^t \mathbf{F}(t) dt$.由加速度计算速度,以及由速度计算位移等问题也属于

此类衔接问题.

4 叠加原理在刚体力学中的应用

刚体力学是力学课程的核心内容,也是叠加原理应用的提升部分.在这部分叠加原理主要体现无穷多个力矩(力)的同时作用效果,以及部分贡献与整体效果的关系.从以下实例可以看出叠加原理在刚体力学中的作用.

如图1所示,一质量为 m ,长为 l 的匀质细杆放在摩擦系数为 μ 的粗糙水平面上,当细杆绕过杆一端且垂直于转动平面的 O 轴转动时,可以利用叠加原理的第二种含义计算摩擦力矩.

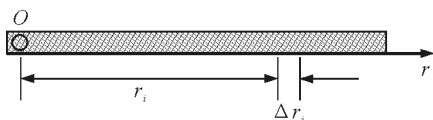


图1 摩擦力矩计算示意图

设细杆绕垂直于图面的 O 轴顺时针旋转,杆上每一点均受摩擦力,将杆长分成 n 等分,第 i 小份的长度为 Δr_i ,第 i 小份到轴的距离为 r_i ,所受摩擦力记为 ΔF_i ,根据力矩的定义 $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$,可以看出,每一小份受到的摩擦力矩的方向均为垂直图面指向外,则整根杆受到的摩擦力矩可以近似写成

$$M = \sum_{i=1}^n r_i \Delta F_i \quad (6)$$

当 $\Delta r_i \rightarrow 0$ 时,即 $\Delta F_i \rightarrow 0$,式(6)变成

$$M = \lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n r_i \Delta F_i \quad (7)$$

式(7)为摩擦力矩的精确值,具有无穷多项加和的含义,可以写成如下定积分形式

$$M = \int_0^l r dF \quad (8)$$

叠加原理的第三种含义可以利用质点的动能推导得到刚体的转动动能过程进行解释.计算刚体定轴转动的转动动能时,首先将刚体分割成 n 份,第 i 份(质元)的质量和速度分别为 m_i 和 v_i ,则刚体的转动动能 E_k 可以写成

$$E_k \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9)$$

刚体做定轴转动时,刚体上各点转动速度不同,但转动的角速度相同,即 n 个质元的转动角速度都相同,将转动角速度记作 ω ,则 $v_i = r_i \omega$.式(9)可以改写成

$$E_k \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \quad (10)$$

为了得到刚体动能 E_k 的精确结果,就要保证每一份内部各点的 r_i 值相等,这就要求 $\Delta r_i \rightarrow 0$,即 $m_i \rightarrow 0$,式(10)又可以写成

$$E_k = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

即

$$E_k = \iiint_V \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_V r^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (11)$$

由于刚体上各点的转动角速度相等,所以将求解动能时的积分过程转化到了利用积分求解转动惯量问题.刚体角动量推导过程与转动动能的推导过程相似.

5 结束语

力学以牛顿定律为纲研究机械运动的3种形式,定积分的思想和方法在力学问题中的应用是力学课程一个重要研究内容,它是叠加原理的思想和方法的具体应用形式.利用数学上定积分是无穷多项和的意义,将中学的力学问题和大学力学内容衔接起来,给出了叠加原理在力学课程中3种含义,并通过实例对3种含义进行了解释.

参考文献

- 姜黎霞,王雪梅.质点力学在大学物理中的作用.中外教育研究,2010(6):47~49
- 范晓辉.物理学中的叠加原理及其应用.物理教学,2011(33):7~11
- 高志军,章鸿.物理学中叠加原理的数学基础.宁夏农学院学报,1998(19):32~35
- 同济大学数学系.高等数学(下册)(第六版).北京:高等教育出版社,2007.225~226
- 马秀艳,韩国松.叠加原理的数学基础及其在物理学上的应用.安阳师范学院学报,2006(5):24~26