动量定理和微元法的妙用

彭爱国
（武汉市第三中学　湖北 武汉　430050）

（收稿日期:2018－01－20）

摘　要:在磁场中做切割磁感线运动的导体,受安培力作用做变加速运动时,在中学阶段无法用牛顿第二定律和运动学公式直接求解它的速度、位移和运动时间,但运用动量定理和微元法的思想则可巧妙地定量求解变加速运动的速度、位移和运动时间.

关键词:变加速运动　动量定理　微元法

在磁场中做切割磁感线运动的导体,受安培力作用做变加速运动时,它的速度、位移和运动时间,在中学阶段,用牛顿第二定律和运动学公式无法直接求解,但运用动量定理和微元法的思想则可定量求解前者无法解决的问题.

1　用动量定理和微元法求变加速运动的速度

【例 1】如图 1 所示,一边长为 L、电阻为 R 的正方形导线框以速度 v_0 进入磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的匀强有界磁场,有界磁场的宽度大于 L,已知穿过有界磁场后的速度为 v',求线框全部进入磁场时线框的速度大小.

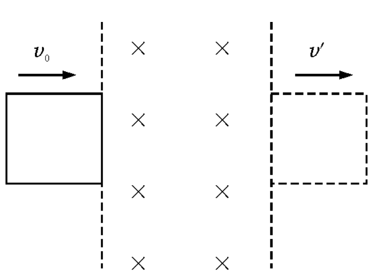

图 1　例 1 题图

分析与解:设线框质量为 m,全部进入磁场时的速度为 v,线框进入磁场的过程,由动量定理有

$$-\sum_{i=1}^{n} BI_i L\Delta t_i = mv - mv_0 \tag{1}$$

$$I_i = \frac{BLv_i}{R} \tag{2}$$

由式(1) 和(2) 可得

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{B^2L^2v_i\Delta t_i}{R} = mv - mv_0$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t_i = L$$

即

$$-\frac{B^2L^3}{R} = mv - mv_0 \tag{3}$$

线框出磁场的过程,同理有

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{B^2L^2v_i'\Delta t_i}{R} = mv' - mv$$

即

$$-\frac{B^2L^3}{R} = mv' - mv \tag{4}$$

由式(3) 和(4) 可得

$$v = \frac{v_0 + v'}{2}$$

【例 2】如图 2 所示,水平导轨 $abcd$ 与 $efgh$ 在 e 和 h 处相连接,并与光滑的弧形导轨在水平位置相切.匀强磁场竖直向上穿过水平导轨区域,已知导轨 $abcd$ 的宽度是 $efgh$ 宽度的 2 倍,金属棒 P 和 Q 的质量分别为 m 和 $2m$,其中 Q 棒静止放在 $efgh$ 轨道上.各轨道都足够长,不计一切摩擦和轨道的电阻,现将 P 棒从距水平轨道高为 H 处由静止释放,求棒 P 和 Q 的最终速度分别是多少?

分析与解:设 P 棒进入磁场时的速度为 v_0,由动能定理

$$mgH = \frac{1}{2}mv_0^2$$

得

$$v_0=\sqrt{2gH} \tag{1}$$

当两个金属棒的速度稳定时，回路中的感应电流为零，设金属棒 P 的速度减小到 v_1，金属棒 Q 的速度增大到 v_2，则有

$$2BLv_1-BLv_2=0$$

即

$$v_2=2v_1 \tag{2}$$

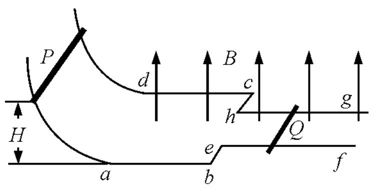

图 2　例 2 题图

对金属棒 P，由动量定理有

$$-\sum_i 2BLI_i\Delta t_i=mv_1-mv_0 \tag{3}$$

对金属棒 Q，由动量定理有

$$\sum_i BLI_i\Delta t_i=2mv_2-0 \tag{4}$$

由式(1)～(4)解得

$$v_1=\frac{1}{9}\sqrt{2gH}\qquad v_2=\frac{2}{9}\sqrt{2gH} \tag{5}$$

2　用动量定理和微元法求变加速运动的位移

【例 3】 如图 3 所示，一个很长的、竖直放置的圆柱形磁铁，在其外部产生一个中心辐射的磁场(磁场水平向外)，其大小为 $B=\frac{k}{r}$(其中 r 为辐射半径——考察点到圆柱形磁铁中心轴线的距离，k 为常数)，设一个与磁铁同轴的圆形铝环，半径为 R(大于圆柱形磁铁的半径)，圆环通过磁场由静止开始下落，下落过程中圆环平面始终水平，已知圆环电阻为 R_0，质量为 m，当地的重力加速度为 g，若圆环从开始下落经时间 t_1 速度达到最大，则圆环下落的高度 h_1 为多大?

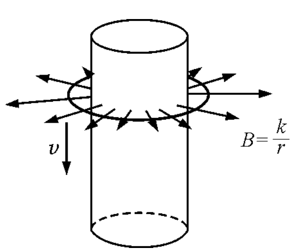

图 3　例 3 题图

分析与解： 当圆环加速度 $a=0$ 时，速度达到最终速度 v_m，此时有

$$F_{安}=mg \tag{1}$$

$$E=B\times 2\pi Rv_m \tag{2}$$

$$I=\frac{E}{R_0} \tag{3}$$

$$F_{安}=BI\times 2\pi R \tag{4}$$

$$B=\frac{k}{R} \tag{5}$$

由式(1)～(5)解得

$$v_m=\frac{mgR_0}{4\pi^2k^2}$$

由动量定理有

$$mgt_1-\sum_i F_it_i=mv_m \tag{6}$$

$$\sum_i F_it_i=\frac{B^2(2\pi R)^2}{R_0}\sum_i v_it_i=\frac{4\pi^2R^2B^2}{R_0}h_1=\frac{4\pi^2k^2}{R_0}h_1 \tag{7}$$

由式(5)～(7)解得

$$h_1=\frac{mgR_0}{4\pi^2k^2}\left(t_1-\frac{mR_0}{4\pi^2k^2}\right)$$

3　用动量定理和微元法求变加速运动的时间

【例 4】 如图 4 所示，在光滑的水平面上，有两宽度均为 L 的有界匀强磁场，3 条平行直线 AB，CD，EF 为磁场的边界，两磁场的方向相反，且垂直桌面，磁场的磁感强度均为 B，一边长为 $l(l<L)$、质量为 m、电阻为 R 的正方形线框静止在桌面上，初始时刻，线框的 ab 边与 AB 重合，现对线框施加一水平向右的特定恒力 F，已知线框在穿过 EF 的过程中恰做匀速运动，求线框穿过磁场所经历的时间.

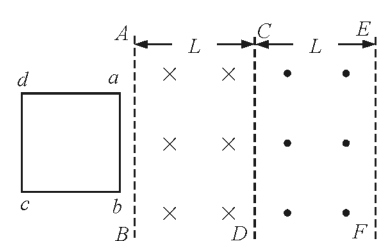

图 4　例 4 题图

分析与解： $E=Blv\qquad I=\frac{E}{R}=\frac{Blv}{R}$

线框匀速运动时有

$$BIl=F$$

得

"气缸类型"在气体实验定律中的应用

李健华
(深圳市布吉高级中学 广东 深圳 518114)

(收稿日期:2018-11-10)

摘 要:活塞封闭气缸里一定质量的理想气体,一般考查有:一个气室即单缸单室类型、两个气室即单缸双室类型和两个气缸两个气室即双缸双室类型.主要利用气体实验定律或理想气体状态方程进行求解,涉及到力的平衡问题、牛顿第二定律等.

关键词:气缸 单缸单室 单缸双室 双缸双室 气体实验定律

气体实验定律的应用是热学的重点和难点,气体实验定律与牛顿定律、力的平衡问题有机地结合起来,形成综合性较强的力学问题,有利于考查综合分析能力及对物理过程的分析推理能力.在新高考要求中属于Ⅱ级要求,新课改以来作为选修3-3计算题部分,分值在10分左右,较好地考查了学生的核心素养.在2018年全国高考的7套物理试题中,其中涉及气体实验定律计算题部分的有全国Ⅰ,

---

$$v=\frac{FR}{B^2l^2}$$

线框进入磁场的过程,安培力冲量

$$I_1=-\sum_i BI_il\Delta t_i=-\sum_i\frac{B^2l^2v_i\Delta t_i}{R}=-\frac{B^2l^3}{R}$$

线框通过CD分界线的过程,安培力的冲量

$$I_2=-\sum_i 2BI_il\Delta t_i=-\sum_i 2B\cdot\frac{2Blv_i}{R}\cdot l\Delta t_i=-\frac{4B^2l^2}{R}\sum_i v_i\Delta t_i=-\frac{4B^2l^3}{R}$$

同理可得线框出磁场的过程,安培力的冲量

$$I_3=I_1=-\frac{B^2l^3}{R}$$

全过程,由动量定理有

$$Ft+I_1+I_2+I_3=mv$$

联立上式解得

$$t=\frac{mR}{B^2l^2}+\frac{6B^2l^3}{FR}$$

利用动量定理和微元求和的思想可巧妙求解电磁感应中做变加速运动的导棒的速度、位移和时间,此方法也可推广到一般:当物体受一与其速度大小成正比的力(如阻力$f=kv$等)和其他恒力共同作用下做变加速直线运动时,对任一过程,只要已知该过程的初速v_1、末速v_2、位移x、时间t中任意3个,便可用动量定理和微元法求解第4个物理量.

Magical Effect on Momentum Theorem and Micro Element Method

Peng Aiguo
(Wuhan No.3 Middle School, Wuhan, Hubei 430050)

Abstract: For cutting in the magnetic field of magnetic induction line movement conductor, the ampere force is used as the variable accelerated motion, in high school can't solve it directly with Newton's second law and the kinematics formula, velocity, displacement, and the motion time, but based on the idea of the momentum theorem and micro element method can be clever quantitative solving variational acceleration movement velocity, displacement, and the movement of the time.

Key words: variable accelerated motion; momentum theorem; micro element method